515
G229c

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
515
~~510.8~~
G229c
MATHEMATICS
MATHEMATICS

Return this book on or before the **Latest Date** stamped below. A charge is made on all overdue books.

University of Illinois Library

~~OCT 11 1951~~

L161—H41

4I
29/7/26

Calculs numériques et graphiques

N° 60.

COLLECTION ARMAND COLIN
(Section de Mathématiques)

Calculs Numériques et Graphiques

par

Emile GAU
Doyen de la Faculté des Sciences de Grenoble

33 figures et graphiques

LIBRAIRIE ARMAND COLIN
103, Boulevard Saint-Michel, PARIS

1925

Tous droits réservés

Tous droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays.
Copyright 1925, by Max Leclerc et H. Bourrelier.

5

PRÉFACE

Ce livre devait être écrit par Samuel Lattès, Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse ; Lattès en avait établi le plan et en avait même commencé la rédaction lorsqu'une maladie soudaine l'emporta en quelques jours ; la disparition de ce jeune et savant mathématicien est une grande et douloureuse perte à tous les points de vue, et il n'est que juste de saluer ici la mémoire de celui qui fut l'un des tout premiers collaborateurs désignés pour cette Collection Armand Colin.

Le plan de Lattès a dû être un peu modifié, en raison de nécessités d'ordre matériel ; mais l'essentiel en a été conservé et ses notes m'ont été très utiles, en particulier pour la rédaction du premier chapitre.

Il existe beaucoup d'ouvrages sur les divers procédés pratiques de calcul ; nous n'avons pas la prétention de les résumer tous ici, bien loin de là, et ce petit livre n'a rien d'une encyclopédie. Nous avons eu simplement pour but d'exposer des méthode permettant d'effectuer les calculs qui se présentent le plus couramment dans la pratique, qui soient, d'une part, assez élémentaires pour être comprises et maniées sans danger par des lecteurs n'ayant pas fait une étude approfondie des mathématiques supérieures, et, d'autre part, assez générales pour éviter l'étude de nombreux procédés qui ont été proposés en vue d'effectuer telle ou telle opération spéciale. Ces procédés particuliers n'ont d'intérêt que pour les personnes qui ont à faire souvent une même opération : dans ce cas, les renvois

Mathématiques
613256

aux ouvrages spéciaux plus détaillés, qui sont donnés au cours du livre, permettront au lecteur de trouver rapidement les procédés dont il s'agit ; l'étude de ceux-ci sera d'ailleurs grandement facilitée par celle des méthodes générales que nous exposons.

Dans la pratique, tantôt il est nécessaire d'obtenir un résultat numérique avec une grande précision, c'est-à-dire de savoir le degré d'approximation du résultat, lequel n'est presque jamais rigoureusement exact ; tantôt, au contraire, on tient surtout à obtenir le résultat avec rapidité, en sacrifiant un peu la précision. Nous avons essayé de fournir aux lecteurs, dans ces deux cas, un outil commode et sûr.

Chapitre premier

LES OPÉRATIONS DE L'ARITHMÉTIQUE

I. — *REPRÉSENTATION DÉCIMALE DES NOMBRES*

1. Données d'un calcul. Nombres. — Dans tout calcul numérique, il y a lieu d'envisager :

1° les données du calcul,

2° les opérations à effectuer sur ces données,

3° les résultats du calcul.

Dans les applications, les données sont des nombres fournis par la mesure de certaines grandeurs que l'on compare à des unités de même nature. Ces nombres, obtenus à l'aide d'instruments de mesure, ne sont connus qu'avec une certaine approximation qui dépend de la nature des instruments et du procédé de mesure. Les données se présentent alors en général sous la forme de nombres décimaux dont on connaît exactement un certain nombre de décimales, une incertitude régnant sur la valeur de la dernière décimale : on saura, par exemple, qu'une longueur est comprise entre 5 m. 340 et 5 m. 345.

Les données peuvent être aussi des nombres définis d'une façon abstraite, en partant d'une définition mathématique : tel est le nombre π, rapport de la circonférence à son diamètre. Les séries (chap. IV), les inté-

grales définies (chap. V) permettront de définir ainsi certains nombres obtenus, à partir de nombres connus, par une suite indéfinie d'opérations arithmétiques déterminées ; les nombres ainsi calculés peuvent à leur tour servir de données dans un nouveau calcul.

2. Représentation sur une droite. — Un nombre abstrait peut toujours être considéré comme mesurant une certaine longueur, avec une unité donnée ; cela permet de représenter tout nombre algébrique x par un point d'un axe $x'x$ (fig. 1).

Ayant choisi sur la droite $x'x$ une origine des longueurs O, un sens positif Ox, et une unité de longueur OK par exemple, on appelle *abscisse* d'un point M de cet axe le nombre qui mesure la longueur OM, affecté du signe + ou du signe —, suivant que M est, par rapport à O, du même côté que x (côté positif) ou que x' (côté négatif).

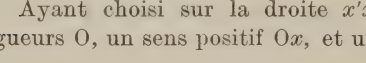

FIG. 1.

Il est évident que tout nombre algébrique est ainsi l'abscisse d'un certain point M, qui le représente.

3. Valeurs approchées d'un nombre à $\frac{1}{10^n}$ près. — Supposons qu'on prenne par exemple $n = 3$; imaginons alors qu'on porte vers la droite les distances $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, etc., toutes égales à $\frac{1}{10^3}$ (fig. 2) ; l'abscisse du point A_p sera ainsi égale à $\frac{p}{10^3}$; opérons de même vers la gauche de O, au moyen des points A'_1, A'_2, A'_3, etc., l'abscisse de A'_p étant $\frac{-p}{10^3}$.

Soit maintenant un nombre algébrique x quelconque (que nous supposons positif sur la figure, mais qui peut être négatif) ; ce nombre est représenté par un point M, qui ne coïncidera que très exceptionnellement

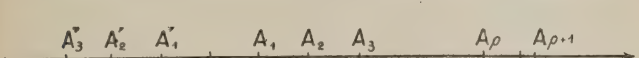

Fig. 2.

avec l'un des points de division A ou A' ; en général, il tombera entre deux des points de division ; l'abscisse du point immédiatement à gauche de M s'appellera alors *valeur approchée à* $\frac{1}{10^3}$ *près par défaut,* celle du point à droite : *valeur approchée à* $\frac{1}{10^3}$ *près par excès* du nombre x.

Or l'abscisse du point à gauche aura toujours pour valeur $\frac{p}{10^3}$, p étant un certain nombre entier positif ou négatif, et celle du point à droite sera alors $\frac{p+1}{10^3}$, de telle sorte qu'on aura : $\frac{p}{10^3} < x < \frac{p+1}{10^3}$.

On opèrera de même pour toute autre valeur de n ; les valeurs approchées de x à $\frac{1}{10^n}$ près seront donc de la forme $\frac{p}{10^n}$ (par défaut) et $\frac{p+1}{10^n}$ (par excès), p étant un nombre entier positif ou négatif, et on aura :

$$\frac{p}{10^n} < x < \frac{p+1}{10^n}.$$

Remarque. — La différence entre le nombre x et sa valeur approchée (par défaut ou par excès) à $\frac{1}{10^n}$ près, c'est-à-dire l'erreur commise sur x quand on remplace

ce nombre par sa valeur approchée, est inférieure à $\frac{1}{10^n}$. Mais la réciproque n'est pas vraie, et il se peut qu'un nombre décimal diffère de x de moins de $\frac{1}{100}$ par exemple, sans en être pour cela l'une des deux valeurs approchées à $\frac{1}{100}$ près ; par exemple le nombre 3,136 diffère de π de moins de $\frac{1}{100}$: or les valeurs approchées de π à $\frac{1}{100}$ près sont 3,14 et 3,15 ; il faut remarquer toutefois que cela ne peut se produire que parce que la valeur approchée considérée, 3,136, a plus de deux décimales, c'est-à-dire plus que n'en comporte le degré d'approximation. Il est facile de voir, en effet, en utilisant la représentation des nombres sur un axe, que si un nombre décimal x' diffère de x de moins de $\frac{1}{10^n}$, et si ce nombre x' n'a que n décimales, il est effectivement la valeur approchée de x à $\frac{1}{10^n}$ près, par défaut ou par excès.

4. Valeur approchée d'un nombre à une demi-unité près d'un certain ordre décimal. — Nous venons de voir qu'un nombre x a deux valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ près, l'une par défaut, l'autre par excès. Il est naturel de choisir, entre ces deux valeurs, lorsque cela est possible, celle qui est la plus voisine de x ; par exemple, en se reportant à la fig. 2, on voit que le point M est plus voisin de A_{p+1} que de A_p ; on choisira donc pour représenter l'abscisse du point M à $\frac{1}{10^n}$ près, la valeur par excès $\frac{p+1}{10^n}$.

Il est évident, dans ces conditions, que la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée est inférieure en valeur absolue à *la moitié* de l'intervalle $A_p A_{p+1}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2 \times 10^n}$: cela revient en effet à dire que la distance MA_p est inférieure à la moitié de $A_p A_{p+1}$.

Il est facile de se rendre compte qu'il faudra choisir la valeur par excès (c'est-à-dire « *forcer* » la $n^{ième}$ décimale) lorsque la $(n+1)^e$ décimale est *supérieure ou égale à* 5 : dans ce cas, en effet, le point M sera manifestement plus près (ou tout au moins aussi près) de A_{p+1} que de A_p.

Par exemple, on sait que $\pi = 3{,}14159...$ Si on ne veut garder que 3 décimales, c'est-à-dire prendre l'une des valeurs approchées à $\frac{1}{1000}$ près, il faudra choisir 3,142, valeur approchée par excès, et la différence $3{,}142 - \pi$ sera certainement inférieure à $\frac{1}{2000}$. Pour le nombre $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ au contraire, il faudrait choisir 1,414.

Les valeurs ainsi choisies seront dites valeurs approchées de π ou de $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{2000}$ près.

5. Tables numériques. — Dans les tables numériques, les nombres fournis par la table sont donnés avec un certain nombre de décimales fixé à l'avance et écrits suivant la règle du paragraphe précédent, c'est-à-dire à *une demi-unité près du dernier ordre décimal* : ces nombres diffèrent donc des nombres exacts de moins d'une demi-unité du dernier ordre décimal, mais on ignore si c'est par défaut ou par excès.

On indique dans certaines tables (tables de log. de Schrœn,

par exemple) d'un signe spécial (astérisque, trait sous le dernier chiffre, etc.), les nombres qui sont approchés par excès ; l'approximation est ainsi mieux connue.

II. — *CALCUL DES NOMBRES ENTIERS ET DES NOMBRES DÉCIMAUX EXACTS*

6. Généralités. — Le calcul des nombres décimaux se ramène, comme on sait, à celui des nombres entiers. Relativement à ces derniers, nous n'avons pas ici à reprendre l'étude théorique ou pratique des opérations fondamentales de l'arithmétique. Nous voulons seulement indiquer les procédés usuels par lesquels on peut rendre les calculs *plus rapides* et *moins fastidieux*.

Il y a lieu de mentionner tout d'abord les *machines à calculer* dont l'importance devient de jour en jour plus considérable, mais dont la description détaillée et l'étude n'entrent pas dans le cadre de ce livre. On peut les classer en deux groupes : 1° *machines à additionner* du type des caisses enregistreuses si répandues ; 2° *machines à multiplier* (et à diviser) dont la plus connue en France est l'arithmomètre Thomas (1).

7. Emploi de tables. — Il existe beaucoup de tables qui permettent de simplifier ou même d'éviter les opérations usuelles ; en particulier les tables de multiplication telles que celle de Pythagore que tout le monde sait par cœur jusqu'à 10. On peut étendre cette table au delà de 10, mais elle devient alors encombrante et d'un usage peu pratique. C'est là d'ailleurs, malgré les perfectionnements apportés dans leur disposition, un défaut commun à toutes les tables de multiplication un peu étendues : ainsi les tables de Crelle, qui contien-

(1) Le lecteur trouvera une excellente étude, historique et descriptive, des machines à calculer dans l'ouvrage de M. d'Ocagne : *Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques* (2e éd., chez Gauthier-Villars, Paris, 1905).

nent les produits et les quotients de deux nombres quelconques inférieurs à 1000, forment un volume in-folio de 500 pages ; il n'y a guère que les calculateurs de profession qui arrivent à les manipuler rapidement et à s'en servir avec profit. Les machines à multiplier sont aujourd'hui plus rapides, moins encombrantes et moins coûteuses que ces tables.

A défaut de machine, les tables réduites qu'on trouve annexées à certains ouvrages (aide-mémoires, formulaires, etc.), ou même éditées séparément (les tables de M. Zoretti (1) par exemple), rendent de grands services. On trouvera à la fin de ce volume un certain nombre de tables usuelles (carrés, cubes, racines carrées et cubiques, lignes trigonométriques naturelles, fonctions hyperboliques, elliptiques, etc.). *Non seulement le recours à ces tables, au cours d'un calcul, abrège les opérations, mais encore il soulage l'esprit en lui permettant de détendre un moment son attention.*

Remarque. — On abrège souvent les calculs en décomposant les nombres donnés en une somme ou une différence de plusieurs autres. Par exemple si $A = a + \alpha$, $B = b + \beta$, on sait que

$$AB = ab + \alpha b + \beta a + \alpha\beta.$$

Or, il arrive souvent que la dernière expression est plus facile, et même plus rapide à calculer que le produit primitif, surtout lorsqu'on se sert de tables.

Supposons par exemple qu'on ait à sa disposition une table de multiplication des nombres de 1 à 100 ; si l'on veut calculer le produit 7243×8752, ces deux nombres ne figurent pas dans la table ; mais en écrivant

(1) Les *Tables numériques usuelles* de M. Zoretti donnent, par une disposition particulièrement commode, les produits de tous les nombres de 1 à 1000 par les nombres de 1 à 10 (Paris, Gauthier-Villars, 1917).

$$7243 \times 8752 = (7200+43)\times(8700+52) = \begin{cases} 72 \times 87 \times 10000 \\ +\ 72 \times 52 \times 100 \\ +\ 87 \times 43 \times 100 \\ +\ 43 \times 52 \end{cases}$$

tous les éléments de la dernière expression se trouvent facilement et immédiatement au moyen de la table.

III. — *CALCUL DES NOMBRES DÉCIMAUX ILLIMITÉS. ERREURS*

8. Erreur absolue. — On rencontre fréquemment des nombres qu'on ne pourrait mettre sous forme décimale qu'à condition d'écrire un nombre illimité de décimales, ce qui est pratiquement impossible ; tels sont, non seulement les nombres incommensurables comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π etc., mais encore des nombres beaucoup plus simples comme, par exemple, $\frac{21}{13}$; (dans ce dernier cas, les décimales se reproduisent périodiquement).

Dans les calculs, on est amené à n'écrire de ces nombres que quelques décimales en négligeant les suivantes ; on remplace ainsi le nombre exact par un autre qui en diffère plus ou moins, *mais qui est inexact* et qu'on appelle *nombre approché.*

Soit a un nombre qu'on remplace par une valeur approchée a' ; la différence $a - a'$ s'appelle l'*erreur absolue*, ou simplement l'*erreur*, commise sur a ; cette erreur est positive ou négative, suivant que a' est approché par défaut ou par excès ; en la désignant par Δ_a, on a :

$$a = a' + \Delta_a.$$

D'habitude on ne connaît pas exactement Δ_a, mais on connaît une limite supérieure de sa valeur absolue $|\Delta_a|$; quelquefois même, mais plus rarement, on connaît aussi son signe.

Par conséquent, dire que a′ *est une valeur approchée de* a *avec une erreur inférieure à un nombre positif* ε, *c'est dire qu'on a :*

$$a' - \varepsilon < a < a' + \varepsilon.$$

Si on sait que a' est approché par excès, par exemple, on aura :

$$a' - \varepsilon < a < a' ;$$

ces inégalités sont *plus avantageuses* que les précédentes, c'est-à-dire qu'elles laissent moins de place à l'indétermination qui subsiste pour connaître la valeur de a.

Représentation géométrique. — Reprenons la représentation des nombres sur un axe, étudiée au paragraphe 2.

Supposons qu'on ne connaisse pas exactement la position du point A, qui a pour abscisse a, mais qu'on sache que ce point A est certainement situé entre deux points connus M et N : l'intervalle MN s'appellera *intervalle d'indétermination* pour le nombre a (fig. 3).

Le point M (ou tout point à gauche de M) représente une valeur approchée par défaut de a ; le point N (ou tout point à droite de N) représente une valeur approchée par excès. Les points situés entre M et N représentent des valeurs approchées de a, mais dans un sens qu'on ne connaît pas.

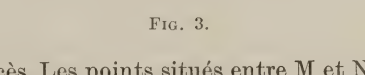

Fig. 3.

Si on choisit, pour représenter a, une valeur approchée a' représentée par le point A′ (qui n'est pas obligatoirement entre M et N), il est évident que *l'erreur commise aura pour maximum la distance du point A′ au plus éloigné des points M et N.*

On voit alors que le maximum de l'erreur sera le plus petit possible en prenant A′ au milieu de MN (l'abscisse de A′ sera alors égale à la demi-somme des abscisses de M et N) ; *mais il y a souvent avantage, au*

point de vue de la simplicité des calculs, à prendre un autre point que le milieu, et même parfois, un point en dehors de l'intervalle MN.

Exemple. — Supposons qu'on sache que

$$1{,}5988 < a < 1{,}5993,$$

le milieu de l'intervalle d'indétermination a pour abscisse 1,59905 : ce nombre est approché de a avec une erreur inférieure à la moitié de l'intervalle total, soit $\frac{2{,}5}{10\,000}$. En prenant comme valeur approchée 1,6, nombre qui est *en dehors* de l'intervalle, l'erreur aurait pour maximum $\frac{12}{10\,000}$: ce maximum est plus grand que le précédent, mais par contre le nombre 1,6 n'a qu'une décimale au lieu de cinq ; il y a bien des cas où il est plus avantageux de choisir 1,6 ; on saurait en outre, dans ce cas, que ce nombre est approché par excès.

Il est bon de remarquer aussi sur l'exemple précédent que le nombre a est compris manifestement entre 1,59 et 1,60 ; on connaît donc ses deux valeurs approchées à $\frac{1}{100}$ près.

Il est inutile d'énoncer des règles à suivre sur ces questions ; le simple examen de la représentation graphique schématique fournit immédiatement la réponse aux diverses questions qui peuvent se poser.

Remarque. — Si le nombre a' est approché de a avec une erreur absolue inférieure à $\frac{1}{100}$ par exemple, *il ne faut pas dire* que a' est une valeur approchée de a à $\frac{1}{100}$ près : cette expression créerait une équivoque, en laissant croire que le nombre a' est l'une des deux valeurs approchées particulières définies au paragraphe 3. Nous rappelons ici, en insistant, la remarque de la page 3 sur ce sujet.

9. Principe de l'addition des erreurs. — Il arrive fréquemment que, dans le calcul d'un nombre a, on commette successivement plusieurs erreurs.

Soit b une valeur approchée de a avec une erreur absolue $< \varepsilon$.

Soit c une valeur approchée de b avec une erreur absolue $< \varepsilon'$.

Soit d une valeur approchée de c avec une erreur absolue $< \varepsilon''$.

On peut en conclure que d est une valeur approchée de a avec une erreur inférieure à $\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon''$.

On a, en effet :

$$a - d = (a - b) + (b - c) + (c - d).$$

Mais la valeur absolue d'une somme est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues des divers termes de cette somme ; par suite,

$$|a - d| \leqslant |a - b| + |b - c| + |c - d|,$$

d'où *a fortiori* : $|a - d| \leqslant \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon''$.

C'est le principe de l'addition des erreurs ; en fait, en examinant en détail ce qui se passe dans chaque cas particulier (au moyen de la représentation graphique), on peut souvent obtenir des limites plus avantageuses que celle que donne ce principe ; mais cet examen est long et délicat et en pratique il est plus commode d'appliquer la règle ci-dessus.

Par exemple, la valeur approchée du nombre π donnée par Archimède est $\frac{22}{7}$: supposons qu'on sache, ce qui est vrai, que l'erreur est inférieure à $\frac{15}{10\,000}$. D'autre part on a $22 : 7 = 3{,}143$ avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2000}$. On en conclut que 3,143 est une valeur approchée de π avec une erreur inférieure à $\frac{15}{10\,000} + \frac{1}{2000}$, soit $\frac{2}{1000}$.

On a donc :

$$3{,}141 < \pi < 3{,}145.$$

10. Erreur relative. — On appelle *erreur relative* le quotient $\frac{\Delta_a}{a}$ de l'erreur absolue par le nombre exact. L'erreur relative n'est pas ordinairement connue exactement. On en obtient un maximum en prenant le quotient du maximum de l'erreur absolue par une valeur approchée *par défaut* de a. Dans la mesure d'une grandeur physique, c'est de l'erreur relative que dépend la *précision* de la mesure. Il est clair, par exemple, qu'une longueur de 1 km. mesurée avec une erreur absolue inférieure à 1 mètre (erreur relative $\frac{1}{1000}$), peut être considérée comme mesurée avec autant de précision qu'une longueur de 1 mètre, mesurée avec une erreur absolue inférieure à 1 mm. (erreur relative $\frac{1}{1000}$).

D'ailleurs l'erreur relative est un nombre indépendant des unités choisies, car c'est le *rapport* de deux grandeurs de même espèce, tandis que l'erreur absolue est une *grandeur* dont la mesure par un nombre dépend des unités choisies.

Nous reviendrons sur la théorie des erreurs relatives au § 30, chapitre III ; pour l'instant, nous n'aurons à considérer que des erreurs absolues.

11. Calcul des nombres décimaux illimités : méthode élémentaire. — Soient a et b deux nombres *positifs* compris respectivement entre a' et a'' pour le premier, b' et b'' pour le deuxième. Il est facile d'obtenir une valeur approchée par défaut et une valeur par excès pour les résultats des quatre opérations fondamentales

de l'arithmétique qu'on peut faire sur a et b. Les inégalités

$$a' < a < a''$$
$$b' < b < b''$$

entraînent en effet :

$$a' + b' < a + b < a'' + b''$$
$$a' - b'' < a - b < a'' - b'$$
$$a'\,b' < ab < a''b''$$
$$\frac{a'}{b''} < \frac{a}{b} < \frac{a''}{b'}.$$

Soient par exemple :

$a = \sqrt{2} = 1{,}4142$ à 0,0001 près par défaut
$b = \pi = 3{,}1416$ à 0,0001 près par excès

Si l'on veut calculer par exemple le quotient $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$, on remarquera que

$$\frac{1{,}4142}{3{,}1416} < \frac{\sqrt{2}}{\pi} < \frac{1{,}4143}{3{,}1415} ;$$

d'où, en effectuant,

$$0{,}45015\ldots < \frac{\sqrt{2}}{\pi} < 0{,}45019\ldots$$

On a ainsi pour le résultat un certain intervalle d'indétermination ; ici, il sera par exemple avantageux de prendre 0,4502 comme valeur du résultat, bien que ce nombre soit en dehors de l'intervalle ; il est visiblement approché par excès et avec une erreur inférieure à $\frac{1}{20\,000}$.

Autre exemple. — Soit à calculer par cette méthode le rayon R d'une sphère de 1 m² de surface. On a :

$$1 = 4\pi R^2,$$

d'où

$$R = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}.$$

Or $$\frac{1}{3,1416} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3,1415}.$$

On peut faire ces divisions avec une approximation plus ou moins grande ; par exemple, on voit facilement que

$$0,318 < \frac{1}{\pi} < 0,319,$$

d'où $$0,07950 < \frac{1}{4\pi} < 0,07975.$$

Donc $$\sqrt{0,07950} < R < \sqrt{0,07975};$$

en effectuant, on a ainsi pour R un intervalle d'indétermination

$$0,2819... < R < 0,2824... ;$$

il sera commode de prendre ici

$$R = 0,282,$$

et cette valeur sera approchée (dans un sens inconnu) à $\frac{1}{2000}$ près.

12. Problème fondamental de la théorie des erreurs. — La méthode élémentaire du paragraphe précédent permet de résoudre le problème suivant : soit à calculer un nombre N, lié à des nombres a, b, c... par une formule connue

$$N = f(a, b, c, ...).$$

Calculer alors une limite supérieure de la valeur absolue de l'erreur Δ_N commise sur N, lorsqu'on remplace dans cette formule les nombres a, b, c... par des valeurs approchées et qu'on connaît des limites supérieures des valeurs absolues des erreurs Δ_a, Δ_b, Δ_c... ainsi commises sur ces nombres.

Cette méthode permet en effet d'obtenir un intervalle qui comprend N ; mais pour peu que la formule donnée soit compliquée, la méthode est impraticable, et d'ail-

leurs elle exige qu'on effectue deux fois la série des opérations.

Ce problème, qui est fondamental, sera résolu d'une façon générale aux chapitres II et III.

13. Opérations abrégées. — La résolution du problème précédent rend inutile, comme on le verra au chapitre III, la théorie des opérations abrégées (multiplication, division, etc.) et permet ainsi de soulager la mémoire des règles relatives à ces théories. Nous retrouverons donc cette question (ch. III, § 29, ex. IV).

CHAPITRE II

LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

I. — *POLYNOMES*

14. Valeurs numériques d'un polynome. — Soit par exemple le polynome

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

et supposons qu'on veuille calculer la valeur numérique $f(x')$ prise par ce polynome lorsqu'on donne à x la valeur particulière x'. Lorsque les coefficients, ainsi que x', sont des nombres entiers assez petits, le calcul direct est simple ; mais, *en général*, la formation des puissances successives de x' est longue : on voit sur l'exemple ci-dessus que le calcul de $f(x')$ exige 7 multiplications. Dans ce cas, il est plus commode et plus rapide d'employer la méthode suivante, basée sur la théorie de la division des polynomes.

Appelons $Q(x)$ et R le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $(x - x')$. On a :

$$f(x) \equiv (x - x')\,Q(x) + R.$$

On sait, et d'ailleurs cela est évident d'après l'identité ci-dessus, que $f(x') = R$. Le polynome $Q(x)$ sera du 3e degré :

$$Q(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

On sait, dans ce cas particulier, et il est bien facile de le retrouver en faisant effectivement la division, qu'on a :

$$b_3 = a_4, \quad b_2 = b_3 x' + a_3, \quad b_1 = b_2 x' + a_2, \quad b_0 = b_1 x' + a_1,$$
$$R = b_0 x' + a_0.$$

On calculera donc successivement ces quantités b_3, b_2, b_1, b_0 et on en déduira R c'est-à-dire $f(x')$. Ces calculs n'entraînent que 4 multiplications ; ils se font très simplement si l'on adopte la disposition de l'exemple suivant.

Exemple. — Soit à calculer la valeur prise par le polynome

$$f(x) = 1{,}7\,x^4 - 3{,}44\,x^3 + 2\,x^2 - 3{,}7,$$

lorsqu'on donne à x la valeur $x' = 2{,}6$. On dispose les calculs comme ci-dessous. La première ligne est formée des coefficients de $f(x)$ (en remplaçant par 0 ceux qui manquent) ; on calcule ensuite les termes du tableau *par colonnes*, en partant de la gauche ; le second terme de chaque colonne est le produit du dernier terme de la colonne précédente par x' ; le 3e terme de chaque colonne est la somme des deux qui sont au-dessus de lui.

Le dernier terme à droite est le résultat cherché.

$a_4 = 1{,}7$	$a_3 = -3{,}44$	$a_2 = 2$	$a_1 = 0$	$a_0 = -3{,}7$
	$b_3 x' = 4{,}42$	$b_2 x' = 2{,}548$	$b_1 x' = 11{,}8248$	$b_0 x' = 30{,}74448$
$b_3 = 1{,}7$	$b_2 = 0{,}98$	$b_1 = 4{,}548$	$b_0 = 11{,}8248$	$R = 27{,}04448$

Si, au cours de ce calcul, on néglige certaines décimales, on commet ainsi des erreurs dont il faudra tenir compte.

En particulier, les calculs ci-dessus se font rapidement à l'aide de la règle à calcul, qui sera étudiée un peu plus loin (§ 23), mais on n'obtient ainsi qu'un résultat approché.

Il est évident que les calculs se font de même, quel que soit le degré du polynome $f(x)$.

15. Valeurs de la variable en progression arithmétique. Théorie des différences. — Supposons que, dans un polynome de degré p, on donne à la variable x une suite de valeurs en progression arithmétique et qu'on veuille dresser la table des valeurs prises par le polynome. *On peut diriger le calcul de façon à n'avoir à calculer directement que* $(p + 1)$ *valeurs consécutives de la table* et à utiliser ensuite ces valeurs pour obtenir toutes les autres. On se sert pour cela de la *théorie des différences*, dont nous allons exposer les éléments.

Etant donnée une suite de nombres

$$(1) \qquad y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n, \ldots\ldots,$$

on appelle *différences premières* des nombres faisant partie de cette suite, les nouveaux nombres Δy_n définis par les égalités

$$(2) \quad \Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \quad \Delta y_n = y_{n+1} - y_n, \ldots$$

Ces différences constituent à leur tour une nouvelle suite de nombres ; les différences premières de cette suite s'appellent les *différences secondes* de la suite (1) ; on les désigne par $\Delta^2 y_n$ et on a :

$$(3) \qquad \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n.$$

On passe de là aux *différences troisièmes* et en général, par le même procédé, aux *différences d'ordre p*. Formons alors le **tableau des différences** suivant :

$$
\begin{array}{llll}
y_0 & \Delta y_0 & \Delta^2 y_0 \ldots \ldots & \Delta^p y_0 \ldots \ldots \\
y_1 & \Delta y_1 & \Delta^2 y_1 \ldots \ldots & \Delta^p y_1 \ldots \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_{n-1} & \Delta y_{n-1} & \Delta^2 y_{n-1} \ldots & \Delta^p y_{n-1} \ldots \\
y_n & \Delta y_n & \Delta^2 y_n \ldots & \Delta^p y_n \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

On remarque que *tout nombre de ce tableau est égal à la somme du nombre placé immédiatement au-dessus de lui et du nombre écrit à la droite de ce dernier* ; ainsi,

$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-1}, \tag{4}$$

comme on le voit immédiatement en calculant $\Delta^2 y_{n-1}$ par la formule (3).

Cela posé, revenons au cas des polynomes et supposons que la suite (1) soit formée des valeurs prises par un polynome $f(x)$ quand on donne à x des *valeurs en progression arithmétique*. On démontre sans difficulté que, *pour un polynome de degré p*, les *différences* $p^{\text{ièmes}}$ *sont toutes égales entre elles*, c'est-à-dire que les nombres de la $(p+1)^{\text{ième}}$ colonne du tableau des différences ci-dessus sont tous égaux entre eux (1) ; *les différences suivantes seraient donc nulles* et sont sans intérêt.

Il résulte de là que pour former le tableau des différences, il suffit alors de connaître les $(p+1)$ premières valeurs de y, car ces nombres suffisent pour calculer la première ligne du tableau ; cette ligne étant connue, ainsi que la colonne des différences $p^{\text{ièmes}}$, cela suffit pour former le tableau, et par conséquent pour calculer toutes les autres valeurs de y, en appliquant de proche en proche la règle énoncée ci-dessus.

(1) On peut s'en rendre compte en remarquant que si, par exemple,

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

en appelant h la raison de la progression arithmétique, la différence première $f(x+h) - f(x)$ est un polynome du 3e degré seulement ; la différence seconde sera donc un polynome de degré 2, et ainsi de suite ; la différence 4e sera constante.

Exemple I. — Former la table des cubes des nombres entiers.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0	1	6	6
1	1	7	12	6
2	8	19	18	6
3	27	37	24	6
4	64	61	30	6
5	125	91		6
6	216			6

Cela revient à calculer les valeurs du polynome $y = x^3$ pour $x = 0,1,2...$ ... D'après ce qui précède, il suffit de calculer les 4 premières valeurs de y ; on voit en effet que ces 4 valeurs suffisent pour calculer tous les nombres situés au-dessus de la ligne brisée figurée en gros traits dans le tableau ci-contre ; comme on sait d'autre part que la colonne $\Delta^3 y$ est composée de nombres égaux, ceux-ci seront donc égaux à 6 ; on forme alors, par de simples additions, les nombres placés immédiatement au-dessous de la ligne brisée, en *partant de la droite* ; on a :

$$18 = 12 + 6, \quad 37 = 19 + 18, \quad 64 = 27 + 37,$$

puis les nombres situés au-dessous de ceux-ci, en partant toujours de la droite :

$$24 = 18 + 6, \quad 61 = 37 + 24, \quad 125 = 64 + 61$$

et ainsi de suite ; on peut ainsi prolonger le tableau vers le bas aussi loin qu'on le voudra : la 2e colonne forme la table des cubes des nombres entiers situés dans la première.

Remarque. — On peut aussi très facilement prolonger le tableau *vers le haut*, c'est-à-dire former la table des cubes des nombres entiers négatifs ; ce prolongement se fait ligne par ligne, en remontant et en partant toujours de la droite : on déduit en effet de la formule (3) que tout nombre du tableau est égal à celui qui est au-

dessous de lui, diminué de celui qui est à sa droite. On obtient ainsi sans difficulté, en remontant, le tableau ci-contre.

...	...	...	...	...
—3	—27	19	—12	6
—2	— 8	7	— 6	6
—1	— 1	1	0	6
x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$

Dans le cas particulier qui nous occupe, il est évident d'ailleurs que ce prolongement était inutile, car le cube d'un nombre entier négatif s'obtient en changeant le signe du cube du nombre positif correspondant. Nous le donnons seulement comme exemple, à titre général.

Exemple II. — Calculer les valeurs du polynome $y = 5\,x^3 - 3\,x^2 + 6\,x - 2$, lorsque x reçoit des valeurs variant de 0,1 depuis — 1 jusqu'à + 1.

On sait qu'il suffit de calculer 4 valeurs successives ; les autres s'en déduisent en formant le tableau des différences qu'on prolongera (en bas et en haut) tant qu'il sera nécessaire. On prendra, par exemple,

$$x = -0{,}1, \quad x = 0, \quad x = +0{,}1, \quad x = +0{,}2,$$

ce qui donne :

$$f(-0{,}1) = -2{,}635, \qquad f(0) = -2,$$
$$f(+0{,}1) = -1{,}425, \qquad f(+0{,}2) = -0{,}880.$$

La différence 3e est égale à 0,03 et le tableau se calcule très aisément. En particulier on voit ainsi que $f(0{,}3) = -0{,}335$ et $f(0{,}4) = 0{,}240$, ce qui prouve que le polynome a une racine entre 0,3 et 0,4.

Remarque importante. — Les calculs ci-dessus doivent être faits exactement, sinon il faudrait tenir compte des erreurs commises, par exemple des suppressions de décimales ; or on voit sans peine que ces erreurs, s'il en existe, prennent rapidement une importance considérable (en vertu du principe de l'addition des erreurs) dès qu'on veut prolonger le tableau des différences. C'est ainsi que dans l'exemple I ci-dessus, si l'on avait commis une erreur ε sur chacune des 4 valeurs fondamentales de y,

l'erreur commise sur y en prolongeant le tableau pour $x = 7$ serait 209 ε ; pour $x = 9$, l'erreur serait 545 ε. On voit que ces erreurs croissent très rapidement ; leur calcul est d'ailleurs délicat et nous supposerons toujours que les calculs des tableaux de différences sont faits exactement.

C'est pour cette raison que la théorie ci-dessus ne s'applique guère que lorsque le polynome $f(x)$ dont il s'agit a ses coefficients entiers ou décimaux. Si ces coefficients étaient fractionnaires ou transcendants, il faudrait préalablement remplacer le polynome $f(x)$ par un *polynome approché*, en appliquant la méthode qui est exposée plus loin, au § 19, pour les fonctions quelconques.

16. Calcul graphique des valeurs d'un polynome. — Il existe de nombreuses méthodes pour obtenir graphiquement la valeur que prend un polynome $f(x)$ pour la valeur x' de la variable (1) ; la plus simple est celle de *Lill* ou *méthode des orthogones*, que nous allons exposer : elle est d'ailleurs une simple traduction graphique du calcul indiqué au § 14. Nous ferons la démonstration pour un polynome du 4e degré, mais la méthode est absolument générale, comme il est aisé de s'en rendre compte.

Considérons tout d'abord un carré MNPQ, sur les côtés duquel on a choisi le sens de parcours indiqué par les flèches (ce carré servira quel que soit le degré du polynome).

Prenons alors comme exemple le polynome

$$y = f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

(1) Voir à ce sujet l'article de M. d'Ocagne dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (éd. française, Paris, Gauthier-Villars, 1909 ; t. I, vol. 4, p. 325).

Par un point quelconque O de l'épure (fig. 4), menons une droite parallèle au côté MN du carré ; nous conviendrons de considérer cette droite comme *orientée dans le sens de la flèche MN*, c'est-à-dire que les longueurs portées sur cette droite seront comptées positivement dans le sens de la flèche MN, négativement en sens contraire ; pour s'en souvenir, on met à côté de cette droite

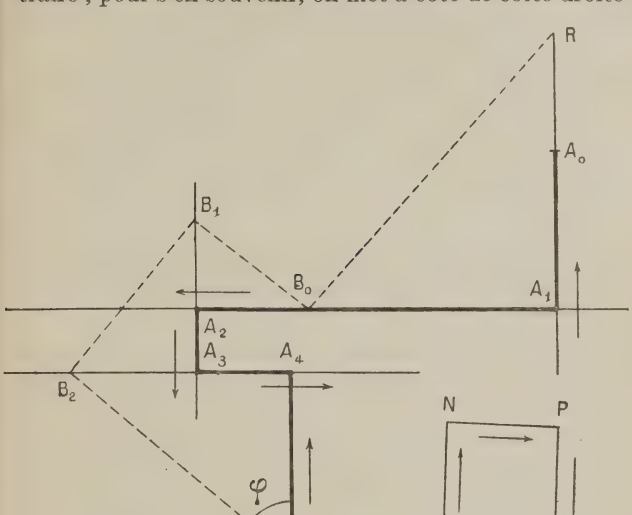

Fig. 4.

une flèche de même sens. Portons alors, conformément à cette convention, la longueur algébrique $\overline{OA_i} = a_i$ à partir de O (sur la fig. 4, on a supposé $a_i > 0$, on peut d'ailleurs toujours supposer qu'il en est ainsi).

Par le point A_i ainsi obtenu, menons une parallèle à NP, qui sera orientée dans le sens de la flèche NP ; nous

l'indiquerons au moyen d'une petite flèche de même sens mise à côté de cette droite ; portons ensuite, à partir du point A_4, la longueur algébrique $\overline{A_4\,A_3} = a_3$ (sur la fig. 4, on a supposé $a_3 < 0$).

Nous continuerons à opérer de même, en menant successivement des parallèles aux côtés du carré, dans l'ordre correspondant au sens de rotation, ces parallèles étant chacune orientée comme le côté correspondant.

Par A_3, on mène donc la parallèle à PQ, orientée comme $\overline{PQ}$, et on porte la longueur algébrique $\overline{A_3\,A_2} = a_2$ (sur la fig. 4, on a supposé $a_2 < 0$).

Par A_2, on mène la parallèle à QM, orientée comme $\overline{QM}$, et on porte la longueur algébrique $\overline{A_2\,A_1} = a_1$ (sur la fig. 4, on a supposé $a_1 < 0$).

Enfin, par A_1, on mène la parallèle à $\overline{MN}$, orientée comme $\overline{MN}$, et on porte la longueur algébrique $\overline{A_1\,A_0} = a_0$ (sur la fig. 4, on a supposé $a_0 > 0$).

L'*orthogone* fondamental ainsi formé permet de calculer très simplement la valeur du polynome $f(x)$ pour une valeur quelconque x' de la variable.

Pour cela, construisons (1) d'abord un angle φ, compris entre 0 et 90°, tel que

$$\operatorname{tg} \varphi = |x'|.$$

Reportons cet angle φ à partir du côté OA_4, O étant le sommet, et l'angle étant à gauche si $x' > 0$, à droite si $x' < 0$. Le deuxième côté de l'angle coupe $A_4\,A_3$ en un point B_3 ; menons par B_3 une perpendiculaire à OB_3, qui coupe le 3e côté de l'orthogone $A_3\,A_2$ en B_1 ; puis par B_1, une perpendiculaire à $B_1\,B_2$ qui coupe $A_2\,A_1$ en B_0 ; enfin par B_0, une perpendiculaire à $B_1\,B_0$, qui coupe $A_1\,A_0$ en R.

(1) On construit un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur 1 et $|x'|$; l'angle φ est celui qui est opposé à ce dernier côté.

On voit que cette 2e ligne polygonale a aussi tous ses angles droits ; c'est un orthogone dont les sommets sont sur les côtés du premier. Il est très facile de voir que la valeur cherchée du polygone $f(x')$ n'est autre que la valeur algébrique du segment $\overline{RA_0}$.

En effet, on a, de proche en proche, en utilisant les notations du § 14 :

$$\overline{B_2A_3} = \overline{B_2A_4} + \overline{A_4A_3} ;$$

or

$$\overline{B_2A_4} = \overline{OA_4} \operatorname{tg} \varphi = a_4 x',$$

$$\overline{A_4A_3} = a_3.$$

Par suite,

$$\overline{B_2A_3} = a_4 x' + a_3 = b_2 ;$$

de même

$$\overline{B_1A_2} = \overline{B_1A_3} + \overline{A_3A_2} = \overline{B_2A_3} \operatorname{tg} \varphi + \overline{A_3A_2},$$

d'où

$$\overline{B_1A_2} = b_2 x' + a_2 = b_1.$$

On voit de la même manière que

$$\overline{B_0A_1} = b_1 x' + a_1 = b_0$$

$$\overline{RA_0} = b_0 x' + a_0 = f(x') \qquad c.\ q.\ f.\ d.$$

On voit donc que, une fois dessiné l'orthogone fondamental, on pourra calculer très rapidement les valeurs particulières du polynome : il suffit pour cela de tracer le deuxième orthogone (en pointillé sur la fig. 4), dont tous les côtés s'obtiennent immédiatement, dès qu'on connaît le premier.

Si R coïncide avec A_0, la valeur x' sera une racine du polynome. La fig. 4 correspond au polynome

$$y = 8x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 16x + 7$$

et à la valeur $x' = \frac{6}{5}$; on trouve $y = 5{,}4$.

II. — *FONCTIONS QUELCONQUES*

17. Diverses sortes d'erreurs commises dans le calcul de la valeur d'une fonction.— Les opérations nécessaires, pour obtenir la valeur d'une fonction déterminée $f(x)$ pour une valeur déterminée de x, ne peuvent pas d'habitude se faire exactement dans la pratique ; on est ainsi conduit à commettre des erreurs que nous désignerons sous le nom d'*erreurs de calcul*. Il est à remarquer que ces erreurs peuvent en général être aussi petites qu'on le veut : s'il faut, en effet, dans une opération pratique, limiter le nombre des décimales, on reste libre en général d'en écrire autant que l'on veut.

Mais il y a, dans le calcul d'une fonction, une deuxième sorte d'erreurs ; il arrive fréquemment qu'on soit obligé, pour calculer $f(x)$, de remplacer la valeur exacte de x par une valeur elle-même approchée : soit parce que la valeur exacte n'est pas connue, soit parce qu'elle est trop compliquée.

Ainsi, si l'on veut calculer la fonction $\frac{x+4}{x^3+1}$ pour $x = \pi$, on sera obligé de remplacer π par une valeur approchée, 3,14 par exemple. On commet de ce chef une *erreur systématique* provenant de la substitution d'une valeur inexacte 3,14 à la valeur rigoureusement exacte qui serait π ; cette erreur systématique n'empêchera pas que l'on commette aussi des erreurs de calcul pour traduire la fraction $\frac{3,14 + 4}{(3,14)^3 + 1}$ en nombre décimal : elle préexiste aux erreurs de calcul, et n'a rien de commun avec elles.

En résumé, nous aurons deux sortes d'erreurs :

1° Une *erreur systématique*, qui provient de ce que, au lieu de calculer $\frac{\pi + 4}{\pi^3 + 1}$, nous lui substituons systéma-

tiquement un nombre *différent*, plus facile à calculer, qui est $\frac{3{,}14 + 4}{(3{,}14)^3 + 1}$.

2° Des *erreurs de calcul* qui proviennent de ce que ce nouveau nombre, que nous avons substitué au nombre exact, ne se calculera pas lui-même exactement, parce que les opérations nécessaires ne se font pas toutes exactement [sur l'exemple choisi il n'y a qu'une opération qui donne lieu à erreur, c'est la division finale de 7,14 par 31,959144].

Ne sachant pas, en général, le sens de ces erreurs, *il faudra appliquer le principe de l'addition des erreurs* (§ 9) et supposer qu'elles s'ajoutent.

Mais tandis qu'on reste libre de rendre les erreurs de calcul aussi petites qu'on le veut, il n'en est pas toujours de même pour les erreurs systématiques ; par exemple si la valeur de x est fournie par une mesure expérimentale, la précision des instruments employés nous permettra d'évaluer une limite supérieure de l'erreur (absolue) commise sur x, mais il ne dépend pas de nous d'augmenter cette précision.

18. Calcul d'une limite supérieure de l'erreur systématique. — Le problème à résoudre est le suivant :

Ayant à calculer $f(x)$ pour $x = a$, nous remplaçons la valeur exacte a par une valeur approchée a' qui représente a avec une erreur absolue inférieure à une quantité connue ε, c'est-à-dire telle que $|a - a'| < \varepsilon$. L'erreur commise de ce fait est égale évidemment à $f(a) - f(a')$; comme il n'est pas possible de la calculer exactement, ce qui reviendrait à faire le calcul exact de $f(a)$, on se propose d'en évaluer une limite supérieure, en valeur absolue.

Cette limite supérieure sera d'autant plus *avantageuse* qu'elle sera plus petite, c'est-à-dire plus voisine de la valeur exacte de l'erreur $|f(a) - f(a')|$.

Une solution très simple de ce problème est fournie par le théorème suivant.

Théorème des accroissements finis. — Si la fonction $f(x)$ est représentée, entre les points M et N d'abscisses m et n, par une courbe tracée d'un trait continu et sans point anguleux, il existe au moins un point P sur l'arc de courbe pour lequel la tangente en ce point est parallèle à la corde MN.

Le dessin le montre d'une façon évidente ; la fig. 5

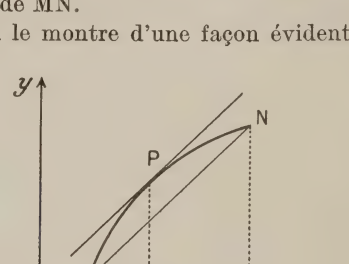

Fig. 5.

est établie dans le cas d'une courbe très simple, mais on peut se rendre compte que le théorème sera exact dans tous les cas de figure qu'on pourrait imaginer.

Soit alors p l'abscisse du point P ; en écrivant que la pente de la droite MN est égale à celle de la tangente en P, on a :

$$\frac{f(n) - f(m)}{n - m} = f'(p),$$

d'où

$$f(n) - f(m) = (n - m) f'(p) \qquad m < p < n. \tag{5}$$

C'est la *formule des accroissements finis.*

Cette formule se démontre par des moyens purement analytiques et indépendamment de toute considération de figure ; les conditions indiquées reviennent à dire que la fonction $f(x)$ est définie ainsi que sa dérivée dans l'intervalle (m, n). Cette formule est d'ailleurs un cas particulier de la formule de Taylor que nous verrons plus loin (§ 19, note au bas de la page 34).

Revenons alors à la question posée au début de ce paragraphe et appliquons la formule (5) à l'intervalle (a, a'). On a :

$$f(a) - f(a') = (a - a')\, f'(\alpha), \qquad (\alpha \text{ compris entre } a \text{ et } a')$$

d'où

$$| f(a) - f(a') | = | a - a' | \times | f'(\alpha) | ;$$

soit A une *borne supérieure* de $| f'(x) |$ dans l'intervalle $(a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)$ ou dans un intervalle qui contient celui-là ; comme a et a' sont compris dans cet intervalle, α y sera aussi et par suite on aura :

$$| f'(\alpha) | < \mathrm{A}.$$

Comme on sait d'autre part que $|a - a'| < \varepsilon$, on obtient la limite supérieure cherchée pour l'erreur systématique

$$| f(a) - f(a') | < \varepsilon \times \mathrm{A}. \tag{6}$$

Remarque sur le calcul de A. — A est un nombre positif fixe, qui est supérieur à toutes les valeurs que peut prendre $|f'(x)|$ quand x varie dans l'intervalle considéré. Il est donc évident que A sera un nombre quelconque supérieur ou au moins égal au *maximum absolu* de $|f'(x)|$ dans l'intervalle ; la valeur la plus avantageuse pour A serait ce maximum absolu lui-même ; mais il n'est pas toujours facile, ni même possible pratiquement de le déterminer ; on se contentera alors d'une valeur moins avantageuse, c'est-à-dire supérieure au maximum, mais obtenue par des calculs plus faciles et plus rapides. On pourra évidemment, pour cela, faire subir à l'expression $f'(x)$ toutes les modifications que l'on voudra, à condition que ces modifications aient toutes pour effet

de majorer l'expression et jamais de la diminuer ; ces modifications consisteront principalement en changement du signe de certains termes, ou même en suppression de termes.

On ne peut énoncer à ce sujet aucune règle générale : il faut se laisser guider par l'expérience et surtout par le simple bon sens.

On utilise fréquemment la remarque suivante : *la valeur absolue maximum d'un produit de plusieurs facteurs variables est inférieure (ou au plus égale) au produit des valeurs absolues maxima des divers facteurs ; la valeur absolue maximum d'un quotient est inférieure (ou au plus égale) au quotient de la valeur absolue maximum du numérateur par la valeur absolue minimum du dénominateur.*

Exemple. — Soit à calculer la fonction $f(x) = \dfrac{x+4}{x^3+1}$ pour $x = \pi$; on prend $\pi = 3{,}14$ et on cherche une limite supérieure de l'erreur systématique ainsi commise.

Tout d'abord, puisqu'on connaît ici la décimale suivante pour π, on sait que $3{,}14 < \pi < 3{,}142$; donc l'erreur sur π est $\varepsilon < \dfrac{2}{1000}$.

Il faut maintenant calculer A ; on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 12x^2 - 2x^3}{(x^3+1)^2}.$$

Nous ne pouvons pas songer à obtenir le maximum exact de la valeur absolue de cette expression ; il faudrait pour cela étudier ses variations dans l'intervalle 3 à 3,2 par exemple ; nous en aurons une borne supérieure en prenant le maximum de la valeur absolue du numérateur et le minimum de celle du dénominateur. Le maximum du numérateur serait facile à obtenir ici exactement ; pourtant il vaut mieux se contenter d'une valeur moins avantageuse, mais plus commode et plus rapide à obtenir, en majorant de la manière suivante : puisque x est positif, on a évidemment ici :

$$|1 - 12x^2 - 2x^3| < 1 + 12x^2 + 2x^3 < 1 + 12 \times (3{,}2)^2 + 2 \times (3{,}2)^3.$$

Cette quantité est inférieure à 190.

Quant au dénominateur, il est manifestement ici positif et croissant ; son minimum dans l'intervalle 3 à 3,2 est donc :

$$(3^3 + 1)^2 = 28^2 = 784.$$

Nous pouvons donc prendre $A = \frac{190}{784} = 0{,}24\ldots$; mais dans la pratique il vaudra mieux augmenter encore ce nombre en le simplifiant, et prendre par exemple $A = 0{,}25$; cette valeur est moins avantageuse, mais beaucoup plus commode à introduire dans les calculs. En définitive, nous obtenons comme limite supérieure de l'erreur systématique :

$$A\varepsilon = \frac{25 \times 2}{100 \times 1000} = \frac{5}{10^4}.$$

Cela signifie que lorsque nous remplaçons le nombre exact $\frac{\pi + 4}{\pi^3 + 1}$ par le nombre approché $\frac{3{,}14 + 4}{(3{,}14)^3 + 1}$, nous commettons *de ce fait* une erreur qui est inférieure à 0,0005.

Les erreurs que nous commettrons dans le calcul effectif de $\frac{3{,}14 + 4}{(3{,}14)^3 + 1}$ s'ajouteront à celle-ci. On a :

$$\frac{3{,}14 + 4}{(3{,}14)^3 + 1} = \frac{7{,}14}{31{,}959144} = 0{,}223\,4\ldots$$

En prenant par exemple 0,223, nous commettrons une erreur de calcul inférieure à 0,0005 et, par suite, l'erreur absolue totale sera inférieure à $\frac{10}{10^4}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{10^3}$; donc le nombre 0,223 est approché à $\frac{1}{10^3}$ près (par défaut ou par excès) du nombre à calculer (voir la remarque du § 3).

La représentation graphique sur un axe donnerait aussi ce résultat ; on voit en effet que le nombre exact est compris entre 0,222 9... et 0,223 9...

Cas particuliers importants. — Appelons

ε une limite supérieure de l'erreur absolue commise sur x

e » » » systématique » » $f(x)$

X' une limite inférieure de $|x|$ } $X' < |x| < X''$.

X'' une limite supérieure de $|x|$ }

En appliquant la méthode indiquée ci-dessus, on trouve :

1° Si $f(x) = kx^n$, $e < |n\,k\,X''^{(n-1)}| \times \varepsilon$
en particulier, si $f(x) = kx$, $e < |k|\,\varepsilon$

2° Si $f(x) = \sqrt{x}$, $e < \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{X'}}$

3° Si $f(x) = E^x$, $e < \varepsilon\, E^{X''}$

4° Si $f(x) = \operatorname{Log} x$, $e < \dfrac{\varepsilon}{X'}$

5° Si $f(x) = \log_{10} x$, $e < \dfrac{\varepsilon}{X' \operatorname{Log} 10} < \dfrac{\varepsilon}{2X'}$

6° $f(x) = \sin x$, $e < \varepsilon$;

on aura une limite plus avantageuse en multipliant ε par le plus grand des deux cosinus : cos X′ et cos X″.

Si $f(x) = \cos x$, $e < \varepsilon$;

on aura une limite plus avantageuse en multipliant par le plus grand des deux sinus : sin X′ et sin X″.

7° Si $f(x) = (1 + r)^x$, $e < \varepsilon\,(1+r)^{X''} \operatorname{Log}(1+r)$.

On trouvera à la fin de l'ouvrage des tables pour la plupart des fonctions ci-dessus.

Nous aurons d'ailleurs l'occasion, au chapitre III, de revenir sur les problèmes de calcul d'erreurs, à propos des fonctions de plusieurs variables. Nous traiterons alors ces problèmes dans toute leur généralité (voir § 28).

19. Calcul des tables d'une fonction quelconque. — Une table a pour objet de donner les valeurs que prend une fonction déterminée $f(x)$, pour des valeurs de x en progression arithmétique dans un certain intervalle ; c'est ainsi qu'une table usuelle de logarithmes, par exemple, donne les valeurs de la fonction $\log_{10} x$ pour les valeurs entières de x de 1 à 10 000 ; ces valeurs de $f(x)$ ne peuvent pas être données par la table d'une façon rigoureusement exacte ; il faut donc conduire le calcul de chacune d'elles de manière à les obtenir toutes avec

le même nombre de décimales, l'erreur absolue étant inférieure à une demi-unité du dernier ordre décimal, comme on l'a vu au § 5.

On peut, évidemment, résoudre directement ce problème et calculer autant de valeurs qu'on voudra pour la fonction ; ce problème est de la catégorie de ceux qui seront traités au § 28. Il ne faut pas croire en effet que dans ce cas, x étant connu exactement, il n'y ait pas lieu de commettre des erreurs systématiques, ce serait s'abuser sur des questions de mots. Dans l'étude du paragraphe précédent, x représente toute quantité que l'on doit remplacer par une valeur approchée. Par exemple, si l'on veut calculer $f(x) = sin\sqrt{x+1}$ pour $x = 1$; le nombre x est connu exactement, mais on commettra pourtant une erreur systématique sur la quantité $\sqrt{x+1}$ quand on voudra prendre son sinus ; ici, c'est la quantité $\sqrt{x+1}$ qui joue le rôle de ce qu'on appelait x au paragraphe précédent. Nous reverrons donc ce genre de problèmes au § 28.

Mais on ne peut songer, en général, à calculer directement toutes les valeurs d'une table ; ce serait beaucoup trop long ; on a vu ci-dessus que lorsque $f(x)$ est un polynome de degré p, il suffit de calculer $(p+1)$ valeurs, les autres s'en déduisant par des opérations simples et rapides. Dans le cas des fonctions quelconques il existe des méthodes de calcul basées aussi sur la théorie des différences ; mais nous ne pouvons pas exposer ici dans le détail les formules sur lesquelles elles reposent. En réalité le calcul de chaque table exige une étude préliminaire spécifique du plan des opérations à faire ; cette étude est très importante et le plan varie suivant la nature de la fonction à calculer (1).

(1) On trouvera l'indication de travaux publiés sur la construction de certaines tables dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, vol. 4, p. 93. — Voir aussi : J. Boccardi, *Guide du Calculateur* (Hermann, Paris, 1902).

Nous nous bornerons à donner ici l'indication sommaire d'une méthode très élémentaire, qui ramène le calcul d'une fonction à celui d'un polynome, lequel se fait alors au moyen des différences, comme on l'a vu au § 15 (1).

Rappelons d'abord un théorème connu : *Etant donnée une fonction $f(x)$, définie et continue dans un intervalle (a, b), il existe un polynome $P(x)$ tel que la différence $|f(x) - P(x)|$ reste aussi petite qu'on voudra pour toute valeur de x dans l'intervalle (a, b).*

Nous n'avons pas à démontrer ici ce théorème dans toute sa généralité ; le moyen que nous allons indiquer pour obtenir $P(x)$ *dans les cas usuels* démontrera naturellement son existence dans ces cas-là.

Calcul du polynome $P(x)$. — Dans les cas usuels on peut appliquer à la fonction $f(x)$ la formule de Taylor ; soit x_0 une valeur de l'intervalle (a, b) (ce sera en général le milieu de cet intervalle) ; en posant $x = x_0 + h$, on aura donc :

$$(7) \quad f(x) = f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^p}{p!} f^p(x_0) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{p+1}(\xi)$$

où ξ est un nombre compris entre x_0 et $x_0 + h$, c'est-à-dire aussi dans l'intervalle (a, b) (2).

Soit alors M une *borne supérieure* de la valeur absolue de $f^{p+1}(x)$ dans l'intervalle (voir § 18, p. 29) ; si on appelle l la distance du point x_0 au plus éloigné des points a et b, on aura $|h| < l$; par suite :

$$\left| \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} f^{p+1}(\xi) \right| < \frac{M l^{p+1}}{(p+1)!}.$$

(1) Cette méthode revient, au fond, à l'application de la formule connue, dans la théorie des différences, sous le nom de formule de Newton.

(2) En s'arrêtant au premier terme, c'est-à-dire en faisant $p = 1$, on obtient la formule des accroissements finis (voir § 18).

Par conséquent, si on pose :

$$(8)\quad P(h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} f''(x_0) + \ldots + \frac{h^p}{p!} f^p(x_0),$$

la différence $|f(x) - P(h)|$ restera inférieure à $\frac{M\, l^{p+1}}{(p+1)!}$.

Mais il y a une autre source d'erreurs qui sont, comme la précédente, de la catégorie des erreurs systématiques ; les coefficients $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{1}{1.2} f''(x_0)$ etc. du polynome $P(h)$ ne sont pas en général susceptibles d'être écrits exactement sous forme décimale : or nous avons vu que cela était indispensable pour pouvoir appliquer le calcul des différences (§ 15, remarque). Si nous remplaçons chaque coefficient par une valeur approchée décimale, l'erreur absolue étant inférieure à ε par exemple, on aura un nouveau polynome

$$(9)\quad P_1(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_p h^p,$$

et l'erreur totale commise sera inférieure à

$$\varepsilon + \varepsilon l + \varepsilon l^2 + \ldots + \varepsilon l^p = \varepsilon \frac{l^{p+1} - 1}{l - 1}.$$

En définitive, en remplaçant $f(x)$ par $P_1(h)$, on commettra une erreur inférieure à

$$(10)\quad \frac{M\, l^{p+1}}{(p+1)!} + \varepsilon \frac{l^{p+1} - 1}{l - 1},$$

et cela, quelle que soit la valeur de x prise entre a et b.

Dans la pratique, M est d'autant plus petit que p est plus grand ; le dénominateur $(p+1)!$ croît très vite quand p augmente ; enfin on peut faire les calculs des coefficients a_0, a_1, etc. de manière que ε soit aussi faible qu'on le veut ; on voit donc qu'il sera en général possible de rendre l'erreur totale (10) aussi petite qu'on le voudra.

Méthode à suivre. — Soit à calculer une table de $f(x)$

dans l'intervalle (a, b) ; les nombres de la table doivent être donnés avec n décimales, l'erreur absolue restant inférieure à $\frac{1}{2.10^n}$. On prendra comme point initial x_0, un point voisin du milieu de l'intervalle (ou le milieu lui-même), choisi de façon que les valeurs successives de h soient aussi simples que possible. On déterminera alors p et ε de façon que $\frac{M\, l^{p+1}}{(p+1)!} + \varepsilon \frac{l^{p+1} - 1}{l - 1} < \frac{1}{10^{n+1}}$, par exemple, et on fera la table du polynome $P_1(h)$, par le moyen indiqué au § 15.

Cette table représente les valeurs cherchées de $f(x)$, avec une erreur inférieure à $\frac{1}{10^{n+1}}$; mais ces valeurs comportent d'habitude plus de n décimales : en ne conservant que les n premières, la dernière étant forcée s'il y a lieu, on commettra ainsi une nouvelle erreur, facile à évaluer dans chaque cas, et qui, ajoutée à $\frac{1}{10^{n+1}}$, donnera presque toujours un total inférieur à $\frac{1}{2.10^n}$. Si ce total était supérieur, pour quelques valeurs particulières de x, le mieux serait alors de calculer $f(x)$ directement pour ces valeurs ; mais il est extrêmement rare, dans ce cas, que, en évaluant à nouveau, mais de plus près, les erreurs commises, on ne constate pas que leur total reste entre les bornes voulues.

Les valeurs ainsi trouvées constituent donc la table que l'on désirait.

Exemple. — Proposons-nous d'établir une table de $\sin x$, x étant exprimé en radians de centième en centième, les sinus étant donnés avec 3 décimales.

Il suffit de faire la table pour x compris entre 0 et $\frac{\pi}{4} = 0{,}785...$, soit, en chiffres ronds, pour $0 < x < 0{,}80$.

Nous prendrons comme origine $x_0 = 0{,}40$ et on aura ici $l = 0{,}40$. On sait que la dérivée d'ordre $(p+1)$ de $\sin x$ est $\sin\left[x + (p+1)\frac{\pi}{2}\right]$; cette expression étant inférieure à 1 en valeur absolue, on prendra ici $M = 1$, et l'inégalité fondamentale à vérifier sera ici :

$$\left(\frac{4}{10}\right)^{p+1} \frac{1}{(p+1)!} + \varepsilon \frac{1 - (0{,}4)^{p+1}}{0{,}6} < \frac{1}{10^4};$$

On voit sans peine que cette inégalité se vérifie en prenant

$$p = 4 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon < \frac{8}{10^6}.$$

On prendra donc 5 termes dans la formule (7) de Taylor :

$$\sin x_0 + \frac{h}{1}\cos x_0 - \frac{h^2}{2}\sin x_0 - \frac{h^3}{6}\cos x_0 + \frac{h^4}{24}\sin x_0,$$

et on calculera chaque coefficient des puissances de h avec une erreur absolue inférieure à $\frac{8}{10^6}$. Les tables de la fin du volume ne nous donnent pas cette précision ; nous calculerons donc $\sin x_0$ et $\cos x_0$ par leur série de Mac-Laurin, suivant la méthode du § 38 (1).

On trouve ainsi :

$$\sin 0{,}4 = 0{,}38\,942 \qquad \text{erreur} < \frac{2}{10^6},$$

$$\cos 0{,}4 = 0{,}92\,106 \qquad \text{erreur} < \frac{6}{10^6}.$$

Il est maintenant très facile de calculer les coefficients du polynome $P_1(h)$:

$$P_1(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4$$

(1) Voir en particulier l'exemple V de ce paragraphe, où est traité exactement le même problème ; dans le cas actuel, il suffit de prendre 3 termes dans les développements en série du sinus et du cosinus.

de manière que l'erreur totale commise sur chacun d'eux soit inférieure à $\frac{8}{10^6}$; on a ainsi :

$$a_0 = \sin x_0 = 0{,}38942$$
$$a_1 = \cos x_0 = 0{,}92106$$
$$a_2 = -\frac{1}{2}\sin x_0 = -0{,}19471$$
$$a_3 = -\frac{1}{6}\cos x_0 = -0{,}15351$$
$$a_4 = \frac{1}{24}\sin x_0 = 0{,}01623$$

Il sera commode ici de multiplier tout le polynome par 10^5, et d'écrire :

$$R(h) = 10^5 P_1(h) = 38942 + 92106\,h - 19471\,h^2 - 15351\,h^3 + 1623\,h^4.$$

On fera donc le tableau des différences de ce polynome R (h), h variant par centièmes ; on sait qu'il suffit pour cela de calculer 5 valeurs consécutives : on prendra $h = -0{,}02$, $h = -0{,}01$, $h = 0$, $h = +0{,}01$, $h = 0{,}02$.

Le calcul est immédiat, bien qu'il comporte huit décimales ; une fois fait, il suffira de prolonger le tableau vers le bas jusqu'à $h = +0{,}40$ et vers le haut jusqu'à $h = -0{,}40$. Cela se fait par de simples additions ou soustractions, comme on l'a vu au § 15 ; il est bon de rappeler ici que ces calculs doivent être faits exactement, sans suppression de décimale.

On obtiendra ainsi la table des 80 valeurs de R(h) et, par suite, de $P_1(h)$ en déplaçant la virgule.

Lorsque ces valeurs seront *toutes connues*, alors seulement on supprimera toutes les décimales après la troisième, celle-ci étant convenablement forcée s'il y a lieu : les erreurs ainsi faites ont été prévues et n'ont pas de répercussion les unes sur les autres, puisque le calcul est terminé.

20. Interpolation. — Le problème de l'interpolation est en quelque sorte l'inverse de celui qui a été traité au paragraphe 18 : il s'agit ici, connaissant les valeurs $y_1, y_2, \ldots y_n$ prises par une certaine fonction inconnue $f(x)$, pour les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$, de la variable, de trouver cette fonction (1). Si l'on n'a pas d'autre renseignement sur la fonction, il est bien évident que le problème ainsi posé n'est pas susceptible d'une solution rigoureuse ; car si $g(x)$ est une fonction qui satisfait à la question, toutes les fonctions suivantes :

$$g(x) + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)\,\zeta(x)$$

où ζ est *arbitraire*, y satisferont évidemment aussi ; le problème est donc indéterminé et les solutions qu'on peut en donner sont entièrement empiriques. Pour faire un choix, parmi cette infinité de fonctions qui prennent les valeurs voulues, on se laisse guider dans la pratique par des raisons de *simplicité* et de *commodité*.

La fonction la plus simple étant le polynome, on a intérêt dans la plupart des cas à choisir le polynome de degré minimum répondant à la question : c'est ce qu'on appelle l'*interpolation parabolique*. La solution de ce problème est donnée immédiatement par la *formule de Lagrange* qui se vérifie aisément :

$$g(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3) \ldots (x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_n)} + \ldots + y_n \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

Dans chaque numérateur, l'indice i du binome $x - x_i$ prend toutes les valeurs 1,...n, sauf 1 pour le premier, 2 pour le deuxième, etc.

(1) Les valeurs connues de la fonction sont généralement le résultat de mesures expérimentales.

Dans le cas où on n'a que deux points (n = 2), la formule précédente donne :

$$g(x) = y_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

qui est du premier degré en x ; elle représente donc une droite passant par les deux points, et son emploi revient à remplacer la courbe inconnue par sa corde entre ces deux points. La formule ci-dessus peut se mettre sous la forme plus commode suivante :

$$g(x) = y_1 + (x - x_1) \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Si l'on a des renseignements sur la nature de la fonction, on pourra essayer une interpolation plus avantageuse au moyen de fonctions particulières ; par exemple, si l'on sait que la fonction cherchée est *périodique*, on prendra, au lieu d'un polynome en x, c'est-à-dire d'une somme de puissances de x, une somme de fonctions circulaires multipliées par des coefficients convenables : c'est ce que l'on appelle l'*interpolation trigonométrique* (1).

Dans d'autres cas il y a intérêt à interpoler au moyen de quantités exponentielles, logarithmiques, etc.

Solution graphique. — La courbe qui représente la fonction cherchée doit passer par les points connus (x_1, y_1), (x_2, y_2),... (x_n, y_n). On place donc ces points sur une feuille de papier quadrillé et on dessine une courbe passant par ces points, en se laissant guider par les mêmes idées que précédemment, c'est-à-dire en choisissant une *courbe aussi simple que possible.*

Limite supérieure de l'erreur commise dans l'interpolation. — Si l'on ne connaît pas la fonction $f(x)$, il n'y a évidemment aucun moyen d'évaluer l'erreur commise quand on remplace cette fonction par la fonction d'in-

(1) On trouvera quelques indications très simples sur cette question dans le *Cours de Mathématiques générales* de MM. Vessiot et Montel. t. II, p. 147 (Paris, Eyrolles, 1921).

terpolation que nous désignerons par $g(x)$. Dans certains cas, sans connaître exactement la fonction $f(x)$, des renseignements particuliers connus sur cette fonction permettront tout de même cette évaluation ; mais il s'agit là de cas d'espèce, et l'évaluation sera toujours assez grossière.

Si la fonction $f(x)$ est connue, on aura la limite supérieure de l'erreur en calculant une *borne supérieure* de la différence $|f(x) - g(x)|$ dans l'intervalle (x_1, x_n) (1).

21. Usage des tables. — Il arrive le plus souvent, lorsqu'on veut utiliser une table pour calculer la fonction $f(x)$ pour $x = x_0$, que le nombre cherché ne figure pas dans cette table.

Prenons, pour fixer les idées, la table des racines carrées qui est à la fin de ce volume (table I, 3e col.) et supposons que nous voulions calculer $\sqrt{83{,}21}$: ce nombre ne figure pas dans la table.

On a recours alors à une *interpolation* entre les deux valeurs de la table les plus voisines de celle qu'on veut calculer ; on remplace dans cet intervalle la fonction $f(x)$, dont le calcul serait trop long, par un polynome qu'on peut calculer comme on l'a vu au § 19, page 34. Le résultat est d'autant plus précis que le degré du polynome est plus élevé.

Dans la pratique, on se borne le plus souvent à un *polynome du premier degré*, ce qui revient à remplacer la courbe par sa corde, entre deux valeurs consécutives de la table. Ce polynome est alors donné par la formule de Lagrange (c'est d'ailleurs l'équation de la droite qui joint deux points) ; en appelant a et b les deux valeurs de x de la table qui comprennent entre elles x_0, on a le polynome :

(1) Pour ce calcul se reporter à la *Remarque* du paragraphe 18, p. 29 ; on en verra un exemple au paragraphe suivant.

$$y = f(a) + \frac{(x - a)}{b - a}\,[f(b) - f(a)],$$

dans lequel il faut faire $x = x_0$ pour avoir la valeur cherchée. La différence $f(b) - f(a) = \Delta$ porte le nom de *différence tabulaire*. Cette formule montre que la méthode suivie ici revient à augmenter l'ordonnée $f(a)$ d'une quantité proportionnelle à la différence $(x_0 - a)$; c'est pourquoi on la désigne souvent sous le nom d'*interpolation par parties proportionnelles*.

Dans l'exemple du début, on a :

$$\begin{array}{lll} a = 83, & f(a) = \sqrt{a} & = 9{,}1104 \\ b = 84, & f(b) = \sqrt{b} & = 9{,}1652 \end{array} \qquad \Delta = +0{,}0548,$$

d'où la valeur

$$\sqrt{83{,}21} = 9{,}1104 + 0{,}21 \times 0{,}0548 = 9{,}1219.$$

Erreur commise dans l'interpolation par parties proportionnelles. — Cette erreur est égale à

$$e = f(x_0) - f(a) - \frac{x_0 - a}{b - a}\,[f(b) - f(a)].$$

Posons $x_0 = a + h$; on a, d'après la formule de Taylor :

$$f(x_0) = f(a + h) = f(a) + \frac{h}{1}\,f'(a) + \frac{h^2}{2}\,f''(\alpha),$$

α étant un certain nombre compris entre a et b ; de même

$$f(b) = f(a) + \frac{b - a}{1}\,f'(a) + \frac{(b - a)^2}{1.2}\,f''(\beta),$$

β étant également compris entre a et b ; l'expression de l'erreur se réduit alors à

$$e = \frac{h^2}{2}\,f''(\alpha) - \frac{h(b - a)}{2}\,f''(\beta).$$

Dans la pratique, $f''(x)$ a un signe constant entre a et b, donc, les termes ci-dessus sont effectivement de signes contraires ; en appelant M une borne supérieure de

$f''(x)$ entre a et b, la différence ci-dessus sera inférieure en valeur absolue à

$$|e| < \frac{h(b-a)}{2} \text{ M.}$$

Ainsi, sur l'exemple choisi, on a :

$$f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{-\sqrt{x}}{4x^2} ;$$

la plus grande valeur absolue s'obtient pour $x = 83$ et on peut prendre $\text{M} = \frac{\sqrt{83}}{4(83)^2}$. Par suite :

$$e < \frac{21}{200} \times \frac{9{,}1104}{4 \times 6889} < \frac{22 \times 10}{200 \times 4 \times 6600} = \frac{1}{24000} < \frac{5}{100000}.$$

On voit que les 4 décimales du nombre obtenu 9,1219 sont exactes, sauf peut-être la dernière. Ceci n'a rien de fortuit, et *dans les tables bien établies, l'intervalle entre les valeurs successives de x est choisi précisément de telle sorte, que l'interpolation par parties proportionnelles ne puisse entraîner d'erreur que sur la dernière décimale ; mais il est bon de le vérifier.*

III. — *RÈGLES A CALCULS*

Les règles à calculs sont des instruments qui ont été imaginés pour faire *très rapidement* des opérations particulières, résoudre certaines formules, etc. ; les résultats qu'elles fournissent sont, par contre, *relativement peu précis* ; cette précision dépend beaucoup de l'habileté de l'opérateur, mais il est rare qu'on puisse compter sur une erreur *relative* inférieure à 0,001, c'est-à-dire sur 3 chiffres significatifs exacts dans le résultat. Nous allons exposer le principe de ces appareils.

22. Echelle d'une fonction. — Soit la fonction $f(x)$,

Sur une droite choisissons un point origine O et un sens positif de parcours Δ (fig. 6). Donnons à x une valeur quelconque x_0 et soit M le point tel que $\overrightarrow{OM} = f(x_0)$; le nombre x_0 s'appelle la *cote* du point M ; on peut ainsi graduer Δ en marquant les points de cote simple, par exemple les points de cote ± 1, ± 2... ; on aura ainsi constitué une *échelle de la fonction*. Si l'on veut une échelle plus précise, on marquera les points de cote $\pm 0{,}1$, $\pm 0{,}2$...

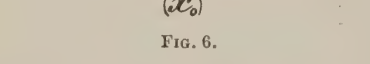

FIG. 6.

La cote s'indique à côté du point marqué ; il faut insister sur le fait que le nombre x_0 mis ainsi à côté d'un point M ne représente nullement l'abscisse du point M : cette abscisse est $f(x_0)$.

Il n'est pas nécessaire d'indiquer les cotes de tous les points marqués sur l'échelle ; en effet, ces cotes sont dans la pratique en progression arithmétique, et il suffit de les indiquer de 10 en 10 ou de 5 en 5, etc., suivant les endroits.

Par exemple, prenons la fonction *log x* (1) ; la cote du point origine sera ici égale à 1 ; il n'y aura aucun point de cote négative, puisque les nombres positifs seuls ont un logarithme ; on aura ainsi l'*échelle logarithmique* de la fig. 7, sur laquelle sont marquées quelques cotes ; celles qui ne sont pas écrites à côté des points marqués se lisent facilement, sachant qu'elles sont en progression arithmétique avec celles des points marqués à droite et à gauche : ainsi entre les cotes 20 et 50 sont indiqués 2 points ; les cotes de ceux-ci sont donc respectivement 30 et 40, de façon à former la progression 20, 30, 40, 50.

(1) On considère ici les logarithmes décimaux usuels, mais les logarithmes des divers systèmes étant proportionnels, il est clair que le changement du système reviendrait à changer simplement l'unité de longueur sur la droite Δ.

Interpolation à vue. — Soit M un point non coté sur l'échelle ; on peut évaluer à vue sa cote par rapport à celles des points cotés les plus voisins : on fait une interpolation à peu près proportionnelle, si les intervalles ne sont pas trop grands ; sinon on corrige le nombre ainsi obtenu, en tenant compte de la rapidité de croissance ou de décroissance de la fonction dans les intervalles voisins. Par exemple, pour le point M pris sur la fig. 7, la distance au point de cote 10 étant à peu près le double

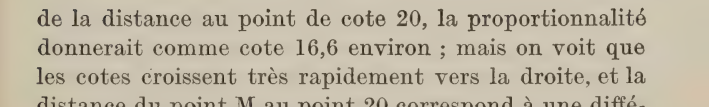

Fig. 7.

de la distance au point de cote 20, la proportionnalité donnerait comme cote 16,6 environ ; mais on voit que les cotes croissent très rapidement vers la droite, et la distance du point M au point 20 correspond à une différence de cotes plus grande que la moitié de la différence entre la cote de M et 10 ; de sorte qu'on sera plus près de la vérité en prenant comme cote 15 par exemple. Cette interpolation à vue est évidemment très aléatoire, et sa précision dépend de l'habileté de l'opérateur.

23. Règle à calcul logarithmique. — Considérons deux échelles logarithmiques égales, telles que celle que représente la fig. 7 par exemple, mais ne comprenant que la partie à droite de O. Ces échelles sont tracées sur deux bandes de papier : l'échelle E sur le bord supérieur d'une bande et l'échelle E′ sur le bord inférieur de l'autre bande ; de telle sorte que lorsqu'on fait coïncider les points origine (de cote 1) des deux échelles, toutes les divisions viennent se placer exactement en face les unes des autres (fig. 8).

Ce système va nous permettre d'évaluer par simple lecture, ou interpolation à vue, le produit ou le quotient de deux nombres m et n.

Faisons glisser en effet l'échelle mobile E′ de manière que son point origine vienne se placer exactement en face du point M de cote m sur l'échelle E ; si ce point n'est pas marqué, on le détermine par une interpolation à vue.

Déterminons maintenant de la même façon le point N de l'échelle E′ qui a pour cote n (fig. 8). Il est évident

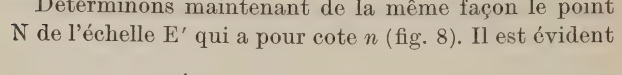

Fig. 8.

que le point K de l'échelle E qui est situé en face de N a une cote k égale à la somme des cotes de M et de N ; comme les cotes sont ici les logarithmes des nombres, il s'ensuit que

$$\log k = \log m + \log n.$$

Par suite, la cote k, qui s'obtient par simple lecture, n'est autre que le produit $m \times n$.

Supposons maintenant qu'on connaisse le nombre k et le nombre n et qu'on veuille déterminer le quotient m de k par n. On déterminera le point K de l'échelle E qui a pour cote k, ainsi que le point N de l'échelle E′ qui a pour cote n et on mettra ces points en face l'un de l'autre ; dans ces conditions, le point M de l'échelle E, qui a pour cote le nombre cherché m, sera exactement en face du point origine O′ de l'échelle mobile : on lira sa cote et on aura ainsi le quotient voulu.

Règle à calcul usuelle. — Elle n'est autre que l'appareil ci-dessus ; les deux échelles sont tracées sur des

réglettes de buis ou de celluloïd ; E′ peut se déplacer en face de E en glissant dans une coulisse. Les réglettes, ayant une longueur limitée, ne peuvent naturellement contenir qu'une portion de l'échelle : on prend d'habitude la portion comprise entre les cotes 1 et 10, mais la longueur de la règle permet de marquer beaucoup plus de points intermédiaires que nous ne l'avons fait sur la figure 7.

Il s'ensuit qu'il faut réduire tous les nombres sur lesquels on opère à l'intervalle (1,10), ce qui est extrêmement facile : le nombre 827 par exemple s'écrit $100 \times 8{,}27$; on opère sur le nombre 8,27 et on retient qu'il faudra multiplier, ou diviser, suivant le cas, le résultat par 100.

Cette règle permet de faire rapidement toutes les opérations qui sont des combinaisons de multiplications et de divisions ; elle est munie généralement d'un *curseur* : c'est une petite plaque de verre enchâssée dans une monture de métal qui peut glisser sur l'appareil indépendamment de la réglette mobile ; sur la plaque est gravé un trait perpendiculaire à la droite qui porte les échelles logarithmiques : ce curseur est le perfectionnement le plus important qui ait été apporté à la règle ; il permet de faire des suites d'opérations sans lire les résultats intermédiaires.

Par exemple, si l'on veut calculer l'expression

$$m \times n \times p \times q,$$

on prend sur E le point de cote m, on amène en face de lui le point origine O′ de l'échelle mobile ; sur celle-ci on prend le point N de cote n et la cote du point K, qui est en face, représente le produit $m \times n$; *il est inutile de lire cette cote* : on repère simplement le point K en amenant le trait du curseur sur le point N ; on déplace alors la règle mobile E′ de manière à amener le point origine O′ sous le trait du curseur, c'est-à-dire en face du point K ainsi repéré par le curseur ; on prend alors sur E′ le point de cote p, et le point P qui se trouve en face de lui sur E a pour cote $k \times p$ c'est-à-dire $m \times n \times p$. On ne lira pas cette cote, on repèrera le point P au moyen du curseur, et ainsi de suite. Ce n'est qu'après avoir fait toutes les

opérations qu'on lira la cote du point obtenu, laquelle sera le résultat cherché (1).

24. Autres règles à calculs. — Si l'on prend, au lieu d'une échelle logarithmique, l'échelle d'une fonction quelconque $f(x)$, on aura un instrument qui permettra de faire rapidement certains calculs où intervient la fonction $f(x)$; par exemple, si l'on traçait sur les deux réglettes l'échelle de la fonction $y = x^2$, on aurait, en se reportant à la figure 8 :

$$OM = m^2 \qquad O'N = n^2,$$

d'où

$$OK = m^2 + n^2 ;$$

la cote k du point K serait donc égale à $\sqrt{m^2 + n^2}$, et l'appareil ainsi construit permettrait de calculer immédiatement le 3e côté d'un triangle rectangle, lorsqu'on connaît les deux autres.

On peut aussi tracer des échelles différentes sur la règle fixe et la règle mobile ; on obtient ainsi des appareils propres à résoudre des formules particulières. En principe on peut toujours imaginer une règle à calcul destinée à résoudre rapidement une formule, si celle-ci n'est pas trop compliquée ; c'est ainsi qu'il existe une règle donnant immédiatement les caractéristiques d'une turbine, quand on connaît les données numériques fondamentales des conditions dans lesquelles elle est appelée à fonctionner.

25. Calcul graphique d'une fonction d'une variable. — Le calcul de la fonction $f(x)$ pour $x = x_0$ revient à déterminer l'ordonnée de la courbe $y = f(x)$ pour l'abscisse x_0; si on écrit cette équation $y - f(x) = 0$, on a au premier membre une expression qui contient en réalité 2 variables.

Nous traiterons cette question plus amplement au chapitre III (§ 31 et suiv.) ; mais on peut indiquer ici

(1) Pour plus de détails sur la manœuvre de la règle et sur la manière de conduire les différentes sortes de calcul, consulter les monographies spéciales vendues par les fabricants de ces instruments.

un moyen très élémentaire et qui donne de bons résultats dans les cas simples.

Soit par exemple (1) la fonction $y = x^3 + p\,x + q$. Traçons les courbes

$$y_1 = x^3 \qquad \text{et} \qquad y_2 = px + q.$$

Ces deux courbes sont très simples : la deuxième est une droite. Pour avoir l'ordonnée y correspondant à l'abscisse x_0, il suffira évidemment de prendre les ordonnées des deux courbes y_1 et y_2 et de les ajouter.

La première de ces courbes, $y_1 = x^3$, ne dépendant pas de p et q, restera la même si l'on change ces coefficients, de sorte qu'une fois construite elle pourra servir indéfiniment pour calculer toutes les fonctions $x^3 + px + q$, quels que soient p et q.

Remarque. — Si l'on construit la courbe $y_1 = x^3$ sur une feuille de papier quadrillé, on s'aperçoit que les ordonnées croissent rapidement et que la feuille ne peut contenir qu'une très petite portion de courbe. Pour remédier à cet inconvénient, on remarquera qu'*il n'est nullement nécessaire de choisir la même unité de longueur sur* Ox *et sur* Oy ; on peut prendre par exemple pour unité 1 cm. sur Ox et 1 mm. sur Oy.

D'ailleurs,dans ce cas,on peut ne construire la courbe que pour les abcisses positives ; les abcisses négatives redonneraient évidemment les mêmes ordonnées changées de signe.

D'une manière générale, si la fonction $f(x)$ peut se décomposer en une somme algébrique de plusieurs autres *plus simples*, $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots$, on construira séparément celles-ci et on ajoutera leurs ordonnées pour obtenir $f(x)$.

(1) Cette fonction est un polynome ; nous la prenons comme exemple, bien que le calcul graphique d'un polynome ait été traité spécialement au paragraphe 16, parce qu'elle donne une démonstration particulièrement claire.

Chapitre III

LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

I. — *CALCULS D'ERREURS*

26. Formule des accroissements finis. — Considérons par exemple une fonction de trois variables $f(x, y, z)$; ce que nous dirons à son sujet s'appliquera quel que soit le nombre des variables. Nous ferons sur cette fonction des hypothèses qui sont toujours vérifiées dans la pratique, savoir que la fonction est continue, ainsi que ses 3 dérivées f'_x, f'_y, f'_z, pour toutes les valeurs des variables x, y, z, comprises respectivement entre a et a', b et b', c et c' (1).

Nous allons chercher une expression de

$$f(a', b', c') - f(a, b, c)$$

analogue à celle qu'on a trouvée dans le cas d'une variable (§ 18). Pour cela posons

$$(12) \quad x = a' + t(a - a'), \; y = b' + t(b - b'), \; z = c' + t(c - c').$$

Nous obtenons ainsi une fonction de la seule variable t qui est :

$$(13) \quad \varphi(t) = f\,[a' + t(a - a'), b' + t(b - b'), c' + t(c - c')]\,;$$

c'est une *fonction composée* de t par l'intermédiaire des

(1) L'ensemble des valeurs ainsi limitées pour les variables x, y, z,.. s'appelle le *domaine* de variation de la fonction.

3 quantités x, y, z, qui sont considérées comme ayant les valeurs indiquées par les formules (12).

Il est évident d'ailleurs que

$$\text{pour } t = 0 \text{ on a } \varphi(0) = f(a', b', c'),$$
$$\text{pour } t = 1 \text{ on a } \varphi(1) = f(a, b, c).$$

Donc

$$f(a, b, c) - f(a', b', c') = \varphi(1) - \varphi(0). \tag{14}$$

Mais puisque la fonction $\varphi(t)$ ne dépend que d'une variable, nous pouvons lui appliquer la formule des accroissements finis du § 18, et nous aurons :

$$\varphi(1) - \varphi(0) = (1 - 0) \times \varphi'(\theta) \qquad 0 < \theta < 1. \tag{15}$$

Or, d'après la règle de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\varphi'(t) = x'_t f'_x(x, y, z) + y'_t f'_y(x, y, z) + z'_t f'_z(x, y, z),$$

c'est-à-dire :

$$\varphi'(t) = (a - a') f'_x(x, y, z) + (b - b') f'_y(x, y, z) + (c - c') f'_z(x, y, z).$$

faisons t = θ ; les formules (14) et (15) donnent alors :

$$f(a, b, c) - f(a', b', c') =$$
$$(a - a') f'_x[a' + \theta(a - a'), b' + \theta(b - b'), c' + \theta(c - c')]$$
$$+ (b - b') f'_y[a' + \theta(a - a'), b' + \theta(b - b'), c' + \theta(c - c')]$$
$$+ (c - c') f'_z[a' + \theta(a - a'), b' + \theta(b - b'), c' + \theta(c - c')]$$

Il est à remarquer que si l'on pose

$$\alpha = a' + \theta(a - a'), \quad \beta = b' + \theta(b - b'), \quad \gamma = c' + \theta(c - c'),$$

les nombres α, β, γ sont compris respectivement entre a et a', b et b', c et c'. La formule précédente s'écrit ainsi :

$$f(a, b, c) - f(a', b', c') = (a - a') f'_x(\alpha, \beta, \gamma) + (b - b') f'_y(\alpha, \beta, \gamma) + (c - c') f'_z(\alpha, \beta, \gamma). \tag{16}$$

Cette formule, qui est dite *des accroissements finis*, généralise celle qu'on a trouvée au chap. II (§ 18) ; elle s'écrit d'une manière analogue *quel que soit le nombre des variables.*

27. Application au calcul des erreurs. — Il est bien entendu qu'il ne s'agit encore ici que *d'erreurs absolues* ; nous suivrons les mêmes voies qu'au paragraphe 18, en nous inspirant exactement des mêmes idées simples.

Soit à calculer la valeur que prend la fonction $f(x, y, z)$, pour certaines valeurs $x = a$, $y = b$, $z = c$ des variables ; pour faire ce calcul nous serons amenés, dans bien des cas et pour différentes causes, à remplacer les nombres exacts a, b, c, par des valeurs approchées a', b', c'. Soient alors ε_a, ε_b, ε_c des limites supérieures pour les erreurs absolues ainsi commises sur a, b, c ; on a :

$$|a - a'| \leqslant \varepsilon_a, \quad |b - b'| \leqslant \varepsilon_b, \quad |c - c'| \leqslant \varepsilon_c.$$

Nous voulons calculer une limite supérieure de l'erreur absolue commise sur $f(x, y, z)$, c'est-à-dire de la quantité $|f(a, b, c) - f(a', b', c')|$; la réponse est immédiatement fournie par la formule (16).

Pour cela nous désignerons par A une borne supérieure de la valeur absolue de $f'_x(x, y, z)$ lorsqu'on donne à x, y, z tous les systèmes possibles de valeurs, comprises respectivement entre a et a', b et b', c et c', ou dans des intervalles comprenant ceux-ci.

Désignons de même par B et C des bornes supérieures pour $|f'_y|$ et $|f'_z|$ dans les mêmes conditions.

Sachant que la valeur absolue d'une somme est au plus égale à la somme des valeurs absolues des divers termes, la formule (16) donne immédiatement :

$$(17) \qquad |f(a, b, c) - f(a', b', c')| \leqslant A\,\varepsilon_a + B\,\varepsilon_b + C\,\varepsilon_c.$$

Cette formule est fondamentale ; elle permet de résoudre toutes les questions relatives aux erreurs ; elle s'applique *quel que soit le nombre des variables.*

Remarque sur le calcul de A, B, C. — Il y a lieu ici de se reporter à ce qui a été dit à ce sujet dans la

remarque du § 18 ; le fait qu'il y a ici plusieurs quantités au lieu d'une ne change rien ni aux idées directrices, ni aux moyens à employer : ne pouvant pas calculer rigoureusement le maximum de $|f'_x|$, il faut faire subir à cette expression des modifications qui, en simplifiant le raisonnement, ne peuvent avoir pour conséquence que *d'augmenter* la valeur absolue la plus grande que puisse prendre $f'_x(x, y, z)$. On va voir ceci sur tous les exemples de ce chapitre, et en particulier sur le suivant.

Exemple. — Soit la fonction $f(x, y, z) = \dfrac{7z - xy}{x^2 + y}$ que l'on veut considérer dans le domaine

$$3 < x < 4, \qquad 1 < y < 2, \qquad 1 < z < 2.$$

On a ici :

$$f'_x = -\frac{y^2 + 14xz - x^2y}{(x^2 + y)^2}, \quad f'_y = -\frac{x^3 + 7z}{(x^2+y)^2}, \quad f'_z = \frac{7}{(x^2+y)}.$$

Pour calculer A, on remarquera d'abord que le numérateur de f'_x donne :

$$|y^2 + 14xz - x^2y| \leqslant |y^2| + |14xz| + |x^2y|,$$

d'après une observation déjà rappelée au sujet de la formule (17).

Donc la valeur absolue de ce numérateur *est inférieure* à

$$2^2 + 14 \times 4 \times 2 + 4^2 \times 2 = 148\,(1).$$

D'autre part, la valeur absolue du dénominateur $(x^2 + y)$ est certainement toujours *plus grande* que $3^2 + 1$, c'est-à-dire 10.

(1) Cette façon d'opérer est très commode, très rapide et s'applique dans tous les cas. Mais en regardant de plus près, on pourrait trouver une réponse plus avantageuse ; par exemple, ici on pourrait dire : la valeur la plus grande possible pour $y^2 + 14xz - x^2y$ est $2^2 + 14 \times 4 \times 2 - 3^2 \times 1 = 107$, la valeur la plus petite possible est $1^2 + 14 \times 1 \times 1 - 4^2 \times 2 = -17$. Cette expression étant toujours comprise entre -17 et $+107$, sa plus grande valeur absolue ne peut dépasser 107, valeur plus avantageuse que 148.

Donc on peut prendre ici $A = \frac{148}{100}$.

Pour f'_y on trouve de même $B = \frac{4^3 + 7 \times 2}{100} = \frac{78}{100}$.

Enfin il est visible que la valeur absolue de f'_z est toujours inférieure à $\frac{7}{10}$. On prendra $C = \frac{7}{10}$.

Nous utiliserons plus loin ces résultats.

28. Problèmes généraux du calcul des erreurs. — Les questions de calcul des erreurs se présentent dans la pratique sous deux aspects principaux.

Premier problème. — *Voulant calculer $f(a, b, c)$, on remplace a, b, c par des valeurs approchées a', b', c' ; trouver une limite supérieure de l'erreur commise.*

Nous avons fait remarquer au § 17 qu'il faut tenir compte, dans ce problème, de deux sortes d'erreurs bien distinctes :

1° l'*erreur systématique*, qui provient de ce que nous remplaçons le nombre exact à calculer par un nombre qui n'est qu'approché $f(a', b', c')$. La formule (17) nous donne précisément une limite supérieure de cette erreur systématique.

2° les *erreurs de calcul*, qui proviennent de ce que ce nombre approché $f(a', b', c')$ ne peut lui-même être calculé exactement dans la pratique, c'est-à-dire être mis sous forme décimale.

Nous avons longuement expliqué ceci au § 17, et nous avons remarqué que ces erreurs de calcul peuvent être rendues aussi petites que l'on veut, en poussant assez loin les opérations, tandis qu'il n'en est pas toujours de même pour les erreurs systématiques (par exemple si a', b', c' sont des valeurs fournies par des mesures expérimentales).

L'erreur totale s'obtient en faisant la *somme* des précédentes ; d'habitude on ne connaîtra pas le *sens* de cette erreur (excès ou défaut) ; les méthodes que nous exposons ici permettraient de trouver ce sens, mais c'est une considération qui complique beaucoup les calculs et les raisonnements, sans bénéfice appréciable.

Exemple I. — Calculer le nombre $N = \dfrac{7\sqrt{2} - \pi\sqrt{3}}{\pi^2 + \sqrt{3}}$.

Nous sommes obligés de remplacer π, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$ par des valeurs approchées ; nous décidons de les prendre, par exemple, avec une décimale : 3,1, 1,7 et 1,4.

Posons ce problème avec les notations employées dans la théorie ; nous avons ici la fonction

$$f(x, y, z) = \frac{7z - xy}{x^2 + y} ;$$

nous voudrions calculer cette fonction pour

$$x = a = \pi, \quad y = b = \sqrt{3}, \quad z = c = \sqrt{2},$$

mais nous la calculons en réalité pour

$$x = a' = 3{,}1, \quad y = b' = 1{,}7, \quad z = c' = 1{,}4.$$

Nous commettons ainsi sur a, b, c des erreurs qui sont (1)

$$|a - a'| < \frac{1}{20} \quad , \quad |b - b'| < \frac{1}{20} \quad , \quad |c - c'| < \frac{1}{20}.$$

La fonction que nous avons ici est précisément celle qui nous a servi d'exemple pour le calcul de A, B, C (voir § 27, p. 53).

Nous avons donc :

(1) Nous pourrions ici avoir des limites plus avantageuses, puisque nous connaissons les décimales suivantes ; ainsi $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$ donc $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}42$; par suite, en prenant 1,4 l'erreur est inférieure à 0,02. Nous garderons les nombres $\frac{1}{20}$ pour plus de généralité, puisque les valeurs adoptées ont une décimale, la suivante étant inférieure à 5.

$$A = \frac{148}{100}, \qquad B = \frac{78}{100}, \qquad C = \frac{70}{100}.$$

D'où l'erreur systématique (form. 17) :

$$\left| f(a, b, c) - f(a', b', c') \right| \leqslant \frac{148 + 78 + 70}{20 \times 100} = \frac{296}{2000}.$$

Nous prendrons $\frac{300}{2000} = \frac{3}{20}$, qui est moins avantageux puisque supérieur, mais plus simple que la valeur trouvée.

Cela signifie que le nombre

$$N' = f(a', b', c') = \frac{7 \times 1{,}4 - 3{,}1 \times 1{,}7}{(3{,}1)^2 + 1{,}7},$$

qui est certainement faux, diffère du nombre exact N d'une quantité qui est inférieure à $\frac{3}{20}$.

Si nous voulons maintenant calculer à son tour N, c'est-à-dire le réduire à la forme décimale, nous serons obligés de commettre de *nouvelles erreurs* (*erreurs de calcul*), provenant de ce que les opérations ne se font pas toujours exactement.

Ces erreurs sont indépendantes de l'erreur systématique, et comme nous ne nous préoccupons pas du sens dans lequel elles sont commises, il est prudent de les ajouter pour pouvoir conclure avec certitude (principe de l'addition des erreurs, § 9).

Ici on a $N' = \frac{453}{1131} = \frac{151}{377}$ sans erreur, mais il est évident que la division en introduira une ; par exemple, si nous ne gardons qu'une décimale au quotient (la suivante étant un zéro) nous commettons ici une erreur inférieure à $\frac{1}{20}$; le résultat est donc 0,4 et l'erreur totale, inférieure à $\frac{3}{20} + \frac{1}{20} = \frac{2}{10}$.

Cela signifie que le nombre N est égal à 0,4, avec une erreur inférieure à $\frac{2}{10}$, c'est-à-dire encore que

$$0{,}2 < N < 0{,}6.$$

Remarque. — Nous avons fait la division avec une seule décimale ; en poussant plus loin l'opération nous aurions diminué l'erreur de calcul, mais l'erreur systématique ne changeant pas, cela n'aurait pas diminué beaucoup l'erreur totale, comme il est facile de s'en rendre compte : on voit par là qu'*il y a avantage à ce que les erreurs soient à peu près du même ordre de grandeur.*

Exemple II. — Calculer le côté du pentadécagone régulier convexe, inscrit dans une circonférence de rayon égal à l'unité de longueur.

Ce côté est donné par la formule

$$N = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\ (\sqrt{5} - 1)\right].$$

Nous devrons ici remplacer $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ par des valeurs approchées ; considérons donc la fonction

$$f(x, y) = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10 + 2y} - x\ (y - 1)\right].$$

Nous voudrions la calculer pour

$$x = a = \sqrt{3}, \qquad y = b = \sqrt{5}.$$

Décidons de prendre une décimale, par exemple, pour ces valeurs ; c'est-à-dire,

$$x = a' = 1{,}7 \qquad y = b' = 2{,}2.$$

On a : $\quad |a - a'| \leqslant \varepsilon_a = \frac{1}{20}, \quad |b - b'| \leqslant \varepsilon_b = \frac{1}{20}.$

Il reste à calculer A et B pour appliquer la formule (17). On a :

$$f'_x = -\frac{y - 1}{4}, \quad f'_y = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{10 + 2y}} - x\right].$$

On remarque qu'on aura certainement ici, dans tout le domaine,

$$1 < x < 2, \qquad 2 < y < 3,$$

d'où $1 < y - 1 < 2$; par suite, le numérateur de f'_x a pour limite supérieure 2, en valeur absolue : donc on peut prendre

$$A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Pour avoir B, nous appliquerons le principe simple de l'addition des valeurs absolues (1). On a :

$$\left| f'_y \right| < \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{10 + 2 \times 2}} + 2 \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{14}} + 2 \right].$$

Le nombre ainsi obtenu est trop compliqué ; nous le simplifierons en *l'augmentant* ; on a : $\sqrt{14} > 3$, donc $\frac{1}{\sqrt{14}} < \frac{1}{3}$ et par suite,

$$\left| f'_y \right| < \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} + 2 \right] = \frac{7}{12}.$$

Nous prendrons $B = \frac{7}{12}$, et nous aurons comme erreur systématique :

$$\left| f(a, b) - f(a', b') \right| \leqslant \frac{1}{20} \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{12} \right) = \frac{13}{240}.$$

Or, $f(a', b') = \frac{1}{4} \left[\sqrt{10 + 2 \times 2{,}2} - 1{,}7\ (2{,}2 - 1) \right]$

$$= \frac{1}{4} \left[\sqrt{14{,}4} - 2{,}04 \right].$$

Ce calcul ne peut se faire exactement à cause du radical.

Prenons par exemple $\sqrt{14{,}4} = 3{,}8$, qui est approché à $\frac{1}{20}$ près ; on aura : $\sqrt{14{,}4} - 2{,}04 = 1{,}76$ à $\frac{1}{20}$ près, et par suite,

(1) On pourrait avoir ici une borne plus avantageuse. Voir la note au bas de la p. 53.

$$f(a', b') = \frac{1{,}76}{4} = 0{,}44 \quad \text{à } \frac{1}{80} \text{ près,}$$

car l'erreur est divisée par 4 (1).

En définitive nous obtenons N = 0,44 avec une erreur absolue totale inférieure à $\frac{13}{240} + \frac{1}{80} = \frac{16}{240} = \frac{1}{15} < 0{,}07$.

Par conséquent,

$$0{,}37 < N < 0{,}51.$$

Il n'est donc pas certain que le nombre 0,4 soit approché à $\frac{1}{10}$ près, puisque sa distance à l'extrémité la plus éloignée de l'intervalle est $\frac{11}{10}$; mais comme nous avons *forcé* les erreurs, pour simplifier leur calcul, il est certain que notre évaluation est exagérée, et il reste très probable que 0,4 est approché à $\frac{1}{10}$ près.

29. Deuxième problème. — *On veut calculer l'expression $f(a, b, c)$ avec une erreur absolue totale inférieure à une quantité donnée ε ; comment faut-il conduire le calcul et, en particulier, quelles valeurs approchées faut-il adopter pour a, b, c ?*

On pourrait dire encore : quelles erreurs peut-on se permettre sur a, b, c, ainsi que dans les diverses opérations à effectuer, pour que le résultat du calcul ne comporte qu'une erreur inférieure à ε ?

Solution pratique empirique. — On prend toutes les valeurs approchées et on fait tous les calculs avec *deux décimales de plus* que n'en comporte l'ordre de grandeur de ε. Dans ces conditions il est assez rare que l'erreur totale sur le résultat dépasse ε.

(1) Nous avons en effet ici une expression de la forme $\frac{x}{4}$ où l'erreur sur x est $\frac{1}{20}$; on a étudié ce cas particulier (p. 32, voir 1°) ; ici $k = \frac{1}{4}$.

On peut s'en assurer dans chaque cas en faisant la récapitulation de ces erreurs et en les évaluant comme il a été fait pour le premier problème : d'ailleurs il est bien évident que sous cette forme, c'est au premier problème qu'on ramène la question, quitte à voir si l'erreur totale reste dans les limites voulues.

Cette solution présente les inconvénients suivants :

Si l'on ne fait pas la vérification, le résultat est incertain, car la règle est loin d'être sûre ; si l'on fait la vérification, celle-ci n'est pas sensiblement plus rapide que la solution rigoureuse du problème que nous donnons ci-après, et dans le cas où elle accuse une erreur supérieure à ε on est obligé de recommencer tous les calculs avec une décimale de plus.

Enfin, il ne faut pas oublier qu'on ne dispose pas toujours des décimales nécessaires pour appliquer cette règle ; si les nombres a, b, c sont tels que π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, etc., on peut évidemment prendre autant de décimales qu'on le veut ; mais si ces nombres, ou seulement quelques-uns d'entre eux, sont des données expérimentales, il faut les prendre tels qu'ils sont, avec l'erreur qu'ils comportent et qu'on n'est pas libre d'approcher de plus près ; dans ce cas on ne pourra donc pas toujours les avoir avec 2 décimales de plus que l'ordre de grandeur de ε.

Solution rigoureuse. — On commettra dans ce calcul une erreur systématique, donnée par la formule (17), et des erreurs de calcul dont nous désignerons le total par α ; on devra donc avoir :

$$\text{(18)} \qquad A\,\varepsilon_a + B\,\varepsilon_b + C\,\varepsilon_c + \alpha \leqslant \varepsilon.$$

Les nombres A, B, C seront calculés comme il a été dit au § 27 ; on détermine en effet sans difficulté des

intervalles simples dans lesquels a, a', b, b', c, c' resteront certainement compris.

Dans la formule (18), les quantités A, B, C, sont donc *connues* ; si a est une donnée expérimentale, ε_a sera connu ; dans d'autres cas (par exemple si $a = \pi$), on pourra en disposer ; de même pour ε_b et ε_c ; enfin on sait qu'on peut disposer de α, car on peut toujours faire les opérations avec autant de précision qu'on le désire.

Il faudra donc choisir α, *ainsi que celles des quantités* ε_a, ε_b, ε_c *dont on dispose, de manière à satisfaire à l'inégalité* (18).

Dans la pratique, il y a en général avantage à réserver des parts à peu près égales aux deux sortes d'erreurs (1), et de prendre

$$A\,\varepsilon_a + B\,\varepsilon_b + C\,\varepsilon_c \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ environ};$$

ce qui reste constituera la limite supérieure tolérable pour les erreurs de calcul ; mais il est bien clair qu'*on peut adopter tout autre distribution des erreurs : l'essentiel est de respecter l'inégalité* (18).

Il peut se faire que le problème soit impossible : par exemple si ε_a est connu, comme A l'est également, l'erreur totale ne peut pas être inférieure à $A\varepsilon_a$ et si l'on demande le résultat avec une précision supérieure, il sera impossible d'y parvenir.

Exemple I.— Calculer le nombre $N = \dfrac{7\sqrt{2} - \pi\sqrt{3}}{\pi^2 + \sqrt{3}}$, avec une erreur absolue inférieure à 0,01.

Il s'agit ici de savoir combien de décimales nous garderons dans les valeurs de π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, pour exécuter les calculs. Remplaçons ces quantités par x, y, z, respectivement ; nous obtenons ainsi la fonction

(1) Voir ci-dessus, ex. I, remarque, p. 57.

$$f(x, y, z) = \frac{7z - xy}{x^2 + y},$$

déjà rencontrée aux paragraphes 27 et 28. On a ici :

$$a = \pi, \quad b = \sqrt{3}, \quad c = \sqrt{2},$$

ce qui donne les valeurs grossièrement approchées

$$3 < x < 4, \quad 1 < y < 2, \quad 1 < z < 2.$$

Donc, comme on l'a vu au § 27, on pourra prendre

$$A = 1{,}48 \qquad B = 0{,}78 \qquad C = 0{,}70,$$

et on devra avoir la condition essentielle :

$$\varepsilon_a \times 1{,}48 + \varepsilon_b \times 0{,}78 + \varepsilon_c \times 0{,}70 + \alpha \leqslant 0{,}01,$$

ou encore :

$$148\,\varepsilon_a + 78\,\varepsilon_b + 70\,\varepsilon_c + 100\,\alpha \leqslant 1. \tag{19}$$

Appliquons la remarque faite ci-dessus, c'est-à-dire prenons la partie provenant de l'erreur systématique inférieure à $\frac{1}{2}$; nous pouvons même donner la même importance à chaque terme, ce qui fera

$$148\,\varepsilon_a \leqslant \frac{1}{6}, \quad 78\,\varepsilon_b \leqslant \frac{1}{6}, \quad 70\,\varepsilon_c \leqslant \frac{1}{6},$$

d'où $\varepsilon_a \leqslant \frac{1}{888}$, $\varepsilon_b \leqslant \frac{1}{468}$, $\varepsilon_c \leqslant \frac{1}{420}$.

On voit ainsi qu'il faudra prendre les nombres avec 3 décimales ; puisque nous connaissons la décimale suivante (voir les tables I et VII à la fin du volume), nous pourrons, sans plus de peine, corriger la 3e s'il y a lieu, ce qui fait que nos erreurs véritables seront bien inférieures aux évaluations ci-dessus.

Donc on prendra :

$$x = a' = 3{,}142, \quad y = b' = 1{,}732, \quad z = c' = 1{,}414$$

et nous aurons :

$$\varepsilon_a < \frac{1}{2000}, \quad \varepsilon_b < \frac{1}{2000}, \quad \varepsilon_c < \frac{1}{2000},$$

c'est-à-dire que

$$148\,\varepsilon_a + 78\,\varepsilon_b + 70\,\varepsilon_c < \frac{296}{2000} = \frac{148}{1000} < \frac{2}{10}.$$

Nous prendrons $\frac{2}{10}$, moins avantageux mais plus simple ; cela signifie que le nombre

$$N' = \frac{7 \times 1{,}414 - 3{,}142 \times 1{,}732}{(3{,}142)^2 + 1{,}732}$$

diffère du nombre N à calculer de moins de $\frac{0{,}2}{100}$; il faut maintenant effectuer les calculs de telle sorte que la somme des erreurs de calcul α vérifie la condition

$$100\,\alpha < 1 - 0{,}2 \qquad \text{ou} \qquad \alpha < \frac{8}{1000}.$$

Cette limite est assez large ; on pourrait en profiter pour simplifier les calculs qui restent à faire. Par exemple on pourrait voir l'influence qu'exercerait sur le résultat final la suppression de quelques décimales, dans la multiplication $3{,}142 \times 1{,}732$; mais il est à craindre que cette étude soit plus longue à faire que la multiplication qu'on veut éviter : elle est donc sans intérêt. Le calcul donne alors :

$$N' = \frac{4\,456\,056}{11\,604\,164} = 0{,}384...$$

La seule erreur de calcul est celle que l'on commet en arrêtant la division ; en l'arrêtant après la 2e décimale, on voit que l'erreur est inférieure à 0,005, nombre inférieur à $\frac{8}{1000}$. Donc on peut prendre $N = 0{,}38$.

En récapitulant les erreurs, on voit que l'erreur totale est non seulement inférieure à $\frac{1}{100}$, mais encore à $\frac{7}{1000}$, c'est-à-dire que

$$0{,}373 < N < 0{,}387.$$

Remarque. — Les tables de la fin du volume donnent non seulement π, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, mais aussi π^2 ; nous aurions pu considérer cette dernière quantité comme

indépendante et l'appeler t, ce qui eût conduit à une fonction de 4 variables $f(x, y, z, t)$ et à un calcul un peu plus simple.

Exemple II. — Calculer le côté du pentédécagone régulier, convexe, inscrit dans une circonférence de rayon égal à 1, avec une erreur absolue inférieure à 0,01.

La formule qui donne ce côté est

$$c = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\ (\sqrt{5} - 1)\right].$$

Nous pourrions remarquer évidemment que ce côté est le double du sinus de l'angle de 12°, lequel se trouve dans les tables ; nous ferons le calcul à titre d'exercice.

Il faut savoir tout d'abord combien nous garderons de décimales pour $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$; remplaçons ces quantités par x et y respectivement ; nous obtenons ainsi la fonction

$$f(x, y) = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10 + 2y} - x(y - 1)\right],$$

déjà rencontrée au paragraphe 28 (voir p. 57) ; on a, comme valeurs grossièrement approchées :

$$1 < x < 2, \qquad 2 < y < 3,$$

d'où : $$A = \frac{1}{2}, \qquad B = \frac{7}{12}.$$

On doit avoir :

$$\frac{1}{2}\varepsilon_a + \frac{7}{12}\varepsilon_b + \alpha < \frac{1}{100}.$$

On prendra $$\frac{1}{2}\varepsilon_a + \frac{7}{12}\varepsilon_b < \frac{1}{200},$$

et pour cela $$\frac{1}{2}\varepsilon_a < \frac{1}{400}, \qquad \frac{7}{12}\varepsilon_b < \frac{1}{400}.$$

d'où $$\varepsilon_a < \frac{1}{200}, \qquad \varepsilon_b < \frac{3}{700}.$$

Il est inutile de calculer $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ qui sont donnés par les tables ; ces tables montrent qu'en prenant

$\sqrt{3} = 1{,}73$, on a : $\varepsilon_a < \frac{1}{200}$ et même $< \frac{3}{1000}$

$\sqrt{5} = 2{,}24$, on a : $\varepsilon_b < \frac{4}{1000} < \frac{3}{700}$;

donc, on calculera

$$c' = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10 + 2 \times 2{,}24} - 1{,}73\,(2{,}24 - 1)\right],$$

c'est-à-dire

$$c' = \frac{1}{4}\left[\sqrt{14{,}48} - 2{,}1452\right] = \frac{\sqrt{14{,}48}}{4} - 0{,}5363.$$

Ce nombre diffère du nombre c à calculer de moins de

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{1000} + \frac{7}{12} \times \frac{4}{1000} = \frac{23}{6000} < \frac{4}{1000} ;$$

il faut donc effectuer les calculs de sorte que la somme des erreurs de calcul (α) soit inférieure à $\frac{1}{100} - \frac{4}{1000}$.

Si on extrait la racine carrée de 14,48, on trouve 3,805... ; en prenant 3,81, l'erreur commise sera inférieure à $\frac{1}{200}$; en divisant par 4, l'erreur précédente est divisée par 4 et, d'autre part, cette division n'introduit pas de nouvelle erreur, puisque toute division par 4 se fait exactement.

Donc, on a :

$$c = \frac{3{,}81}{4} - 0{,}5363 = 0{,}4162,$$

et l'erreur totale est inférieure à $\frac{4}{1000} + \frac{1}{800} = \frac{42}{8000} < \frac{1}{100}$.

La valeur trouvée satisfait donc au problème posé ; mais il est toujours incommode d'avoir plus de décimales que n'en comporte la précision du résultat ; ici il serait bon d'avoir le résultat avec 2 décimales seulement.

Or, si nous prenons $c = 0{,}42$, nous commettons une nouvelle erreur qui est égale à $\frac{38}{10\,000} < \frac{4}{1000}$; il se trouve que cette erreur, ajoutée à celles déjà commises $\frac{42}{8000}$, donne :

$$\frac{42}{8000} + \frac{4}{1000} = \frac{74}{8000} < \frac{1}{100}.$$

Donc on peut ici écrire $c = 0{,}42$, résultat exact avec une erreur inférieure à 0,01.

Les tables donnent 0,41582.

Remarque importante. — Dans l'exemple I, le calcul nous a conduit à un résultat n'ayant que 2 décimales : c'est par hasard.

Dans l'exemple II, le résultat avait 4 décimales, mais nous avons pu en supprimer deux parce que, les erreurs précédentes ayant été plus faibles qu'on ne l'avait prévu, il restait une marge suffisante pour permettre encore la nouvelle erreur commise en supprimant les deux dernières décimales ; c'est là ce qui arrive fréquemment, mais *pas toujours*, et il aurait pu se faire que nous fussions obligés de conserver 3 ou même les 4 décimales, pour être sûr que la somme des erreurs ne dépasse pas 0,01 (1).

On peut, naturellement, diriger le calcul de manière que le résultat ne comporte que le nombre de décimales voulues ; on sait en effet qu'en supprimant les décimales qui suivent la $n^{\text{ième}}$, celle-ci étant convenablement corrigée, l'erreur commise ne peut dépasser $\frac{1}{2.10^n}$; il suffira donc de réserver cette quantité sur l'erreur totale pour être sûr qu'on pourra ne conserver que n décimales au résultat.

L'inégalité fondamentale s'écrira alors :

$$(20) \qquad A\varepsilon_a + B\varepsilon_b + C\varepsilon_c + \alpha + \frac{1}{2.10^n} \leqslant \varepsilon,$$

en conservant toujours les mêmes notations. Mais cette précaution est souvent superflue, comme on l'a vu sur les deux exemples traités.

Exemple III. — On veut mesurer la durée de l'oscillation d'un pendule simple dont la longueur est comprise entre 1 m. et 2 m., par la formule $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

(1) Rapprocher ceci de la remarque faite au paragraphe 3.

Avec quelle précision faut-il mesurer l pour obtenir t à $\frac{1}{100}$ de seconde près.

On sait que $g = 981$ cm., à 1 unité près.

Remplaçons les quantités π, l, g qui ne sont pas connues exactement, par x, y, z ; il vient

$$t = f(x, y, z) = x\sqrt{\frac{y}{z}}$$

d'où

$$f'_x = \sqrt{\frac{y}{z}}\ ,\quad f'_y = \frac{x}{2y}\sqrt{\frac{y}{z}}\ ,\quad f'_z = -\frac{x}{2z}\sqrt{\frac{y}{z}}\ .$$

Or, on a ici, en adoptant les unités *c. g. s*,

$$3 < x < 4,\quad 100 < y < 200\qquad 900 < z < 1000.$$

Par suite, on voit sans difficulté qu'on a :

$$|f'_x| < \sqrt{\frac{2}{9}} < \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2} \qquad \text{donc}\quad A = \frac{1}{2},$$

$$|f'_y| < \frac{4}{200} \times \sqrt{\frac{2}{9}} < \frac{2}{100} \times \frac{1}{2} \qquad \text{donc}\quad B = \frac{1}{100},$$

$$|f'_z| < \frac{4}{1800} \times \sqrt{\frac{2}{9}} < \frac{4}{1800} \times \frac{1}{2} \qquad \text{donc}\quad C = \frac{1}{900}.$$

La formule fondamentale (18) montre qu'il faut avoir :

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_a + \frac{1}{100}\,\varepsilon_b + \frac{1}{900}\,\varepsilon_c + \alpha \leqslant \frac{1}{100}.$$

On sait ici que $\varepsilon_c < 1$; en remplaçant ε_c par 1 nous aurons :

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_a + \frac{1}{100}\,\varepsilon_b + \alpha \leqslant \frac{8}{900} \tag{21}$$

On peut évidemment satisfaire de beaucoup de manières à cette inégalité ; mais dans le cas le plus favorable, c'est-à-dire en supposant qu'on ne commette *aucune* erreur sur π, ni *aucune* erreur de calcul, il faudrait nécessairement

$$\frac{1}{100}\,\varepsilon_b \leqslant \frac{8}{900} \qquad \text{d'où}\ \varepsilon_b \leqslant \frac{8}{9}\ \text{de cm.}$$

C'est là l'extrême limite de l'erreur qu'on peut se permettre dans la mesure de l ; il ne faut pas l'atteindre, mais on peut

s'en rapprocher tant qu'on voudra, à condition de prendre ensuite ε_a et α suffisamment petits pour respecter l'inégalité (21). Par exemple on pourra faire la mesure de l à $\frac{1}{2}$ cent. près ; on aura alors : $\varepsilon_b = \frac{1}{2}$ au maximum, d'où :

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_a + \frac{1}{200} + \alpha \leqslant \frac{8}{900},$$

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon_a + \alpha \leqslant \frac{7}{1800}.$$

On sait que $3{,}14 < \pi < 3{,}142$; donc en prenant $\pi = 3{,}14$, nous aurons $\varepsilon_a < 0{,}002$; par suite, pour vérifier l'inégalité précédente, il suffira de prendre

$$\alpha \leqslant \frac{7}{1800} - \frac{1}{1000} = \frac{26}{9000}.$$

On prendra donc $\pi = 3{,}14$ et on fera les calculs de manière que la somme des erreurs faites dans ces calculs ne dépasse pas cette limite, ce qui est toujours possible.

Faisons alors la mesure de l, qui donne par exemple $l = 134$ cm. à $\frac{1}{2}$ cent. près. Il reste à calculer le nombre

$$t' = 3{,}14 \times \sqrt{\frac{134}{981}}$$

avec une erreur absolue inférieure à $\frac{26}{9000}$.

Nous aurons une première erreur ε_1 dans la division $\frac{134}{981}$; cette erreur ε_1 entraîne sur t' (qui a ici la forme $k\sqrt{x}$), une erreur inférieure à

$$\varepsilon_1 \times \frac{3{,}14}{2\sqrt{\frac{134}{981}}} = \varepsilon_1 \times 1{,}57 \times \sqrt{\frac{981}{134}} < \varepsilon_1 \times 1{,}57 \times \sqrt{10}$$

$$< \varepsilon_1 \times 1{,}57 \times 4 = \varepsilon_1 \times 6{,}28 ;$$

ensuite l'extraction de la racine carrée entraînera une nouvelle erreur ε_2, qui sera multipliée par 3,14 ; on doit avoir finalement :

$$\varepsilon_1 \times 6{,}28 + \varepsilon_2 \times 3{,}14 \leqslant \frac{26}{9000}$$

ou, *a fortiori*:

$$7\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 \leqslant \frac{26}{9000};$$

d'où $7\varepsilon_1 < \frac{13}{9000}$, $4\varepsilon_2 < \frac{13}{9000}$.

On voit qu'il suffit de prendre

$$\varepsilon_1 < 0{,}0003 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 < 0{,}0004,$$

ce qui revient à prendre

$$\frac{134}{981} = 0{,}1365 \qquad \text{alors } \varepsilon_1 < 0{,}0001,$$

et $\sqrt{0{,}1365} = 0{,}3695$ alors $\varepsilon_2 < 0{,}0001$,

d'où $t = 3{,}14 \times 0{,}3695 = 1{,}16023$;

l'erreur de calcul commise est en réalité inférieure à

$$6{,}28 \times 0{,}0001 + 3{,}14 \times 0{,}0001 < 0{,}001,$$

c'est-à-dire largement inférieure à la limite fixée, qui était $\frac{26}{9000}$.

Cela nous laisse une marge qui permettra de supprimer des décimales dans le résultat ; en n'en conservant que deux, par exemple, on aurait de ce fait une erreur égale à 0,00023, laquelle ajoutée à 0,001 reste encore largement inférieure à $\frac{26}{9000}$.

On prendra donc

$$t = 1^s{,}16$$

et ce résultat est exact à $\frac{1}{100}$ de seconde près, ainsi qu'on le voulait.

Exemple IV. — *Opérations abrégées.*

Prenons d'abord la *multiplication* ; l'erreur systématique commise sur un produit ab est, d'après la formule (17),

$$\varepsilon_a \times \max|b| + \varepsilon_b \times \max|a| ;$$

on en déduit le moyen de simplifier les facteurs a et b, suivant la précision avec laquelle on veut avoir le résultat.

Soit par exemple à multiplier $1{,}25712 \times 8{,}321$; on veut avoir le résultat avec 2 décimales et à $\frac{1}{100}$ près.

On a ici : $\max|b| < 9$, $\max|a| < 2$; en outre, il faut ajouter à l'erreur systématique celle qui proviendra de la suppression

des décimales au résultat, laquelle a pour limite supérieure $\frac{1}{200}$.

Il faut donc

$$9\,\varepsilon_a + 2\,\varepsilon_b + \frac{1}{200} < \frac{1}{100},$$

ou

$$9\,\varepsilon_a + 2\,\varepsilon_b < \frac{1}{200},$$

d'où

$$\varepsilon_a < \frac{1}{3600}, \quad \varepsilon_b < \frac{1}{800}.$$

On peut donc prendre $a' = 1{,}257$ (erreur $\frac{12}{100\,000} < \frac{1}{3600}$), et $b' = 8{,}32$ (erreur $\frac{1}{1000} < \frac{1}{800}$). On effectuera le produit $1{,}257 \times 8{,}32$, au lieu du produit primitif ; dans le résultat, qui est 10,45824, on ne conservera que 2 décimales en corrigeant la dernière, s'il y a lieu.

Cela donnera ici 10,46.

Considérons maintenant un *quotient* $\frac{a}{b}$; la formule (17) donne ici comme erreur systématique :

$$\varepsilon_a \times \max\left|\frac{1}{b}\right| + \varepsilon_b \times \max\left|\frac{a}{b^2}\right|.$$

Soit par exemple à calculer le quotient 41,2312 : 783,273 ; on veut le résultat avec 2 décimales et à $\frac{1}{100}$ près.

On a ici : $max\left|\frac{1}{b}\right| < \frac{1}{700}$ $\quad max\left|\frac{a}{b^2}\right| < \frac{50}{490\,000}$.

En tenant compte de l'erreur qui proviendra de la suppression des décimales au résultat il faut avoir :

$$\frac{\varepsilon_a}{700} + \frac{5\,\varepsilon_b}{49\,000} < \frac{1}{200},$$

d'où $\quad \varepsilon_a < \frac{7}{4}, \quad \varepsilon_b < \frac{49}{2}.$

On peut donc prendre par exemple les valeurs simples

$$a' = 40 \qquad b' = 760$$

et faire, au lieu du quotient primitif, la division :

$$\frac{40}{760} = \frac{4}{76} = 0{,}052\ldots$$

On ne conservera que 2 décimales, en corrigeant la dernière, s'il y a lieu. Cela donne ici : 0,05.

On peut traiter de la même manière *toutes les opérations* ; il est bien évident que ces calculs, ayant pour but de *simplifier* l'opération, doivent être faits très rapidement, en comptant les erreurs très largement ; *il ne faut pas perdre, à chercher des simplifications, plus de temps qu'il n'en faudrait pour effectuer l'opération non simplifiée.* On y parvient facilement avec un peu d'habitude.

30. Calcul des erreurs relatives. — L'erreur relative est le quotient $\left|\frac{\Delta_a}{a}\right|$ de l'erreur absolue commise sur le nombre a par ce nombre lui-même (voir § 10) ; On en a une limite supérieure en prenant le quotient de la limite supérieure ε_a de Δ_a, par une valeur approchée *par défaut* de a, en valeur absolue.

Les erreurs relatives font l'objet de propriétés particulières dont la plus simple est la suivante, que nous indiquons sans démonstration :

On obtient une limite supérieure de l'erreur relative commise sur un produit ou un quotient de plusieurs nombres, en ajoutant les limites supérieures des erreurs relatives commises sur ces nombres.

Dans la pratique, les opérations à faire ne comportent généralement pas que des produits ou des quotients ; aussi la propriété précédente, bien que très simple, ne peut être que rarement utilisée.

D'une façon générale, l'emploi des erreurs relatives est incommode dans les calculs ; il faut lui préférer, en

raison de sa simplicité et de sa généralité, la méthode des erreurs absolues qui a été exposée dans les paragraphes précédents. Lorsqu'un problème posé concernera des erreurs relatives, on commencera donc par le transformer en faisant apparaître les erreurs absolues.

On opèrera, pour cela, de la manière suivante :

Premier problème. — Voulant calculer $f(a, b, c)$, on remplace a, b, c, par des valeurs approchées a', b', c' ; trouver l'erreur relative commise sur $f(a, b, c)$.

La solution est immédiate ; on connaît les erreurs absolues commises sur a, b, c ; on calcule donc l'erreur absolue commise sur $f(a, b, c)$ et on la divise par une valeur approchée par défaut (en valeur absolue) de cette quantité $f(a, b, c)$; on peut prendre pour cette valeur approchée la différence entre la valeur trouvée de la fonction et son erreur absolue.

Deuxième problème. — On veut calculer $f(a, b, c)$ avec une erreur relative inférieure à une quantité donnée ε' ; comment faut-il conduire le calcul et, en particulier, quelles valeurs approchées faut-il adopter pour a, b, c ?

On évaluera tout d'abord une borne inférieure de la fonction $f(x, y, z)$ dans le domaine où doivent se trouver les diverses valeurs a, a', b, b', c, c'. Cette évaluation se fait en s'inspirant des mêmes idées que pour le calcul des bornes supérieures A, B, C, des fonctions f'_x, f'_y, f'_z (voir § 27, remarque).

Naturellement, il faudra conduire ce calcul en ne faisant que des modifications qui *diminuent* la fonction à calculer, au lieu de l'augmenter, comme pour A, B, C, en valeur absolue.

Soit n la borne inférieure ainsi trouvée ; il suffira alors de calculer $f(a, b, c)$ de manière que l'erreur

absolue totale ε, commise dans ce calcul, vérifie

$$\frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon' \qquad \text{d'où} \quad \varepsilon < n\,\varepsilon'.$$

La quantité ε étant ainsi connue, on est ramené au deuxième problème du paragraphe 29.

Exemple.— Soit à calculer le nombre $N = \dfrac{7\sqrt{2} - \pi\sqrt{3}}{\pi^2 + \sqrt{3}}$, avec une erreur relative inférieure à $\dfrac{1}{20}$.

Considérons la fonction $f(x, y, z) = \dfrac{7z - xy}{x^2 + y}$ et évaluons-en d'abord une borne inférieure. On a ici :

$$3{,}1 < x < 3{,}2 \qquad 1{,}7 < y < 1{,}8 \qquad 1{,}4 < z < 1{,}5 ;$$

(il faut prendre des intervalles assez petits pour trouver une borne inférieure de la valeur absolue du numérateur qui ne soit pas trop voisine de zéro.)

Par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} 9{,}8 < 7z < 10{,}5 \\ -5{,}76 < -xy < -5{,}27 \end{array}\right\} \text{ d'où } 4{,}04 < 7z - xy < 5{,}23.$$

On peut donc prendre 4 comme minimum du numérateur. D'autre part,

$$x^2 + y < 15,$$

donc, on peut prendre ici $n = \dfrac{4}{15}$; il suffira alors de calculer N avec une erreur absolue inférieure à

$$\varepsilon' \times n = \frac{4}{300},$$

et *a fortiori*, de calculer N avec une erreur absolue inférieure à $\dfrac{1}{100}$.

Ce calcul a été fait (§ 29, exemple I) ; on a trouvé $N = 0{,}38$, qui est la réponse à la question posée ici.

II. — *CALCUL GRAPHIQUE DES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. NOMOGRAMMES*

31. Abaques. — Les méthodes de calcul graphique ont pris dans ces dernières années une très grande

extension ; un ingénieur et mathématicien français, M. d'Ocagne, a eu une part considérable dans ce développement, en constituant sous le nom de *Nomographie* une théorie générale de la représentation graphique des fonctions à un nombre quelconque de variables (1).

L'avantage capital de ces méthodes est de permettre de résoudre rapidement, en général par une simple lecture, des problèmes qui exigeraient des calculs longs et pénibles. Leur inconvénient réside dans leur manque de précision, ou plutôt dans l'incertitude qui plane sur le degré de précision du résultat ; elles exigent en outre l'emploi d'un matériel de courbes déjà tracées, qui est très long à constituer dans chaque cas : aussi ces méthodes sont-elles utilisées surtout par les gens qui ont à résoudre souvent le même problème, avec des données différentes, c'est-à-dire qui utilisent fréquemment les mêmes formules.

Chaque formule est en effet susceptible (et même d'une infinité de façons) d'un tableau de représentations graphiques ou *Nomogramme*. Pour saisir l'idée générale qui est à la base de ces représentations, prenons d'abord un exemple particulier.

Soit une relation entre 3 variables $f(a, b, c) = 0$; si nous traçons la courbe d'équation $f(x, y, c) = 0$, il est clair que le point qui a pour coordonnées (a, b) sera sur cette courbe : une simple lecture donnera l'un de ces deux nombres quand on connaîtra l'autre, et cette lecture sera très facile si la courbe est construite sur un papier finement quadrillé.

Mais cette courbe ne peut servir que pour la même valeur de c ; si cette valeur change, il faut changer également la courbe. Il est évidemment impossible de

(1) Voir en particulier le *Traité de Nomographie* de cet auteur (Paris, Gauthier-Villars, 2e édition, 1921).

construire à l'avance toutes les courbes $f(x, y, c) = 0$, pour toutes les valeurs de c, mais on peut en construire un grand nombre (sur la même feuille et avec les mêmes axes de coordonnées), pour des valeurs de c suffisamment rapprochées : par exemple $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$... et aussi $c = -1$, $c = -2$, etc.

Ce nomogramme constitue alors un *abaque* (qui est de la catégorie des abaques dits cartésiens) pour la formule $f(a, b, c) = 0$; il permet d'obtenir approximativement, par simple lecture, l'une des 3 quantités a, b, c, lorsqu'on connaît les deux autres (fig. 9).

1° *Calcul de a.* — Soit $b = -2{,}4$ et $c = +3{,}3$, par exemple ; la courbe $f(x, y, 3{,}3) = 0$ n'est pas construite sur l'abaque, mais elle est comprise, par raison de continuité, entre les courbes correspondant à $c = 3$ et $c = 4$.

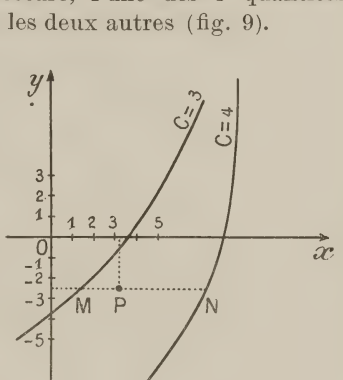

Fig. 9.

Prenons donc sur Oy, par une interpolation à vue, le point d'ordonnée $b = -2{,}4$; le point cherché P se trouve donc entre M et N, à l'intersection de cette droite avec la courbe non tracée $f(x, y, 3{,}3) = 0$.

On détermine ce point au jugé : on pourra par exemple admettre que MP est égal à $\frac{3}{10}$ de MN, ce qui revient à faire une interpolation proportionnelle.

On lit alors l'abscisse de P, qui est ici $a = 3{,}2$ environ.

Le calcul de b, connaissant a et c, se fait exactement de même.

2° *Calcul de c.* — Soient par exemple $a = 3{,}2$, $b = -2{,}4$ (même fig.). On marque sur la figure le point qui admet ces coordonnées : ce sera ici le point P de tout à l'heure. Si l'une des courbes construites passe par P, le problème est résolu et la valeur de c est celle qui correspond à cette courbe ; mais il n'en sera que très exceptionnellement ainsi, et le point P tombera d'habitude entre deux courbes de l'abaque : ici entre les courbes $c = 3$ et $c = 4$; la valeur de c sera donc comprise entre 3 et 4 : on la choisit au jugé, suivant les distances respectives de P aux deux courbes précédentes : ici on prendrait $c = 3{,}3$ car la distance de P à l'une des courbes est à peu près la moitié de sa distance à l'autre.

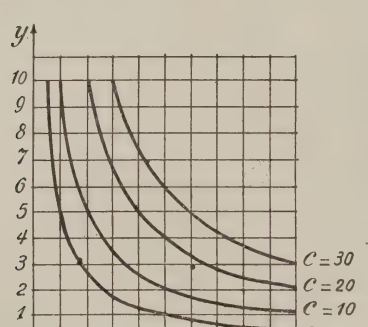

Fig. 10.

Exemple I. — Si nous prenons la formule $ab - c = 0$, la méthode ci-dessus nous permettra de former un abaque donnant en particulier c, lorsque l'on connaît a et b : c'est *l'abaque de la multiplication.*

Les courbes ont ici pour équation : $xy - c = 0$; ce sont des hyperboles équilatères, faciles à construire en grand nombre, comme ci-contre (fig. 10) ; en dessinant cet abaque sur une plus grande échelle, on aura ainsi une véritable table de multiplication très étendue. Il est à peine besoin de dire que cet abaque fait également les divisions, puisqu'il permet de trouver a quand on connaît b et c.

Exemple II. — Soit la formule

$$f(p, q, \lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

qui contient encore 3 variables ; nous ferons jouer à λ le rôle de c ; les courbes de l'abaque seront ici

$$\lambda^2 + x\lambda + y = 0 ;$$

ce sont des droites (1) ; cet abaque est donc particulièrement facile à construire. Il permettra, en particulier, de trouver λ, connaissant p et q, c'est-à-dire de *résoudre les équations du second degré.*

Exemple III. — On peut former, exactement de la même façon, un abaque pour la résolution des équations du troisième degré, de la forme : $\lambda^3 + p\lambda + q = 0$ (2).

32. Généralisation. — On voit facilement que tous les exemples précédents se ramènent à ceci : on représente la valeur de a par un point sur Ox d'abscisse a ; b par un point sur Oy d'ordonnée b, et enfin c par une courbe $f(x, y, c) = 0$. La formule $f(a, b, c) = 0$ exprime qu'il existe une certaine relation entre les positions des deux points et de la courbe.

Les méthodes nomographiques sont basées sur cette remarque, mais très généralisée : on peut en effet faire correspondre à chacun des nombres a, b, c, un élément géométrique convenablement défini (un point, une droite, une courbe, etc.). La formule $f(a, b, c) = 0$ sera alors la traduction d'une certaine condition relative à la position de ces éléments géométriques.

Naturellement, on choisira ces éléments géométriques de manière que l'interprétation de la relation soit aussi simple que possible. Reprenons par exemple l'abaque de la multiplication (voir ex. I ci-dessus) ; au lieu de représenter a par un point d'abscisse a sur Ox, prenons le point d'abscisse $\log a$; de même, représentons b par

(1) La théorie des *enveloppes* montre que ces droites sont toutes tangentes, quel que soit λ, à la parabole $x^2 - 4y = 0$.

(2) Les droites seront ici toutes tangentes à la cubique : $4x^3 + 27y^2 = 0$.

le point d'ordonnée $\log b$ sur Oy ; enfin représentons c par la droite : $x + y = \log c$.

La relation $ab - c = 0$ peut s'écrire

$$\log a + \log b = \log c.$$

Donc, elle signifie que le point qui a pour coordonnées $\log a$ et $\log b$ se trouve sur la droite $x + y = \log c$.

L'abaque sera donc composé de *droites* ; les lectures se feront très aisément si on construit l'abaque sur du papier calibré logarithmiquement, qui se trouve dans le commerce.

On aperçoit ainsi l'extrême variété des divers modes de représentation pour une même formule ; cette variété s'accroît encore du fait qu'on peut prendre des unités de longueur différentes sur Ox et sur Oy ; enfin on peut même considérer des éléments *mobiles* (droites, courbes, etc.), qu'on déplace par rapport aux autres. On trouvera des renseignements très détaillés dans l'ouvrage déjà cité de M. d'Ocagne.

33. Nomogrammes à points alignés. — Dans ces nomogrammes les quantités a, b, c sont toutes représentées par des *points* et non par une ligne, comme il arrivait dans les exemples précédents ; c'est ce qui les rend *particulièrement commodes et pratiques* ; la représentation est choisie de façon que la condition $f(a, b, c) = 0$ soit vérifiée lorsque les 3 points sont en ligne droite (1).

Considérons d'abord les équations $x = f(t)$, $y = g(t)$, qui donnent, comme on sait, les coordonnées d'un point d'une courbe (C) en fonction de la valeur du *paramètre* t. Pour construire aussi exactement que possible cette courbe, on donnera à t un grand nombre de valeurs, qu'il est commode de prendre en progression

(1) Ces nomogrammes ne peuvent donc être utilisés que pour 3 variables.

arithmétique ; par exemple, on fera successivement $t = 0, 1, 2...$ et aussi $t = -1, -2...$ etc.

Les équations données permettent de déterminer ainsi généralement un point de la courbe chaque fois (1) : nous marquerons ce point sur la figure et, de plus, nous indiquerons à côté de lui la valeur correspondante de t ; puis nous réunirons tous ces points fondamentaux par un trait continu : nous obtiendrons ainsi une figure dans le genre de la figure 11, et nous dirons que la courbe ainsi tracée est *graduée par rapport au paramètre t* ; on dit encore qu'elle constitue une *échelle à support curviligne pour t.*

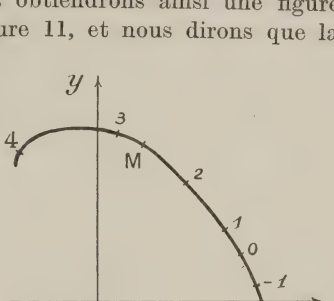

Fig. 11.

Il est clair maintenant que si l'on prend un point quelconque de la courbe, par exemple M, la valeur de t qui donnerait ce point est comprise entre 2 et 3, et on peut l'évaluer à vue, comme il a été déjà fait précédemment dans d'autres questions : ici $t = 2{,}6$ environ ; cette interpolation à vue sera d'autant plus facile et plus sûre que les points fondamentaux correspondront à des valeurs plus rapprochées du paramètre : nous aurions une échelle plus précise en faisant varier t par dixièmes, par centièmes, etc.

Inversement, on peut marquer à vue sur la courbe

(1) On sait qu'il peut y avoir des valeurs de t pour lesquelles les fonctions $f(t)$ ou $g(t)$ n'existent pas ; ceci se rapporte à l'étude de la construction des courbes que nous n'avons pas à faire ici.

le point qui correspond à une valeur donnée du paramètre, autre que celles qui sont marquées.

Cela posé, toute la théorie des abaques à points alignés repose sur la remarque suivante :

Soient trois points M_1, M_2, M_3, de coordonnées $(x_1\ y_1)$, (x_2, y_2), (x_3, y_3) respectivement ; on sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'ils soient en ligne droite se traduit par l'égalité

$$(23) \qquad y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2) = 0.$$

Par conséquent, si l'on peut trouver 6 fonctions

$$(24) \quad (C_1)\begin{cases} x_1 = f_1(a) \\ y_1 = g_1(a) \end{cases} \quad (C_2)\begin{cases} x_2 = f_2(b) \\ y_2 = g_2(b) \end{cases} \quad (C_3)\begin{cases} x_3 = f_3(c) \\ y_3 = g_3(c) \end{cases}$$

telles, que la relation

$$(25) \qquad f(a, b, c) = 0$$

soit équivalente (1) à

$$(26) \qquad \begin{aligned} & g_1(a)[f_2(b) - f_3(c)] + g_2(b)[f_3(c) - f_1(a)] \\ & + g_3(c)[f_1(a) - f_2(b)] = 0, \end{aligned}$$

il est évident que : *dire que la relation* (25) *est vérifiée reviendra à dire que les* 3 *points* M_1, M_2, M_3 *sont en ligne droite.*

Donc, si nous construisons, sur une même feuille et avec les mêmes axes de coordonnées, les 3 courbes (C_1), (C_2), (C_3), en considérant a, b, c comme paramètres pour ces courbes, et si nous les graduons comme il a été dit, nous pourrons voir d'un coup d'œil si 3 nombres donnés a, b, c satisfont à la relation $f(a, b, c) = 0$; il suffira de marquer le point A de paramètre a sur la courbe (C_1), puis le point B de paramètre b sur (C_2), enfin le point C de paramètre c sur (C_3) et de vérifier si ces points sont en ligne droite : les repérages de A, B, C se feront à vue, comme il a été expliqué plus haut.

(1) C'est-à-dire telle que chacune des deux relations entraîne l'autre.

Le dessin permet donc de trouver l'une des 3 quantités quand on connaît les deux autres, c'est-à-dire de résoudre la formule $f(a, b, c) = 0$.

Supposons qu'on ait par exemple $a = 1{,}3$ et $b = 0{,}3$; déterminons à vue la position des points A et B, qui sont respectivement sur (C_1) et (C_2), et joignons ces deux points ; la droite AB coupe la courbe (C_3) en C, dont la cote se détermine à vue $c = -2{,}6$ environ.

La droite AB peut couper la courbe (C_3) en plusieurs points, chacun d'eux fournira une solution.

Toute la difficulté est de trouver les 6 fonctions

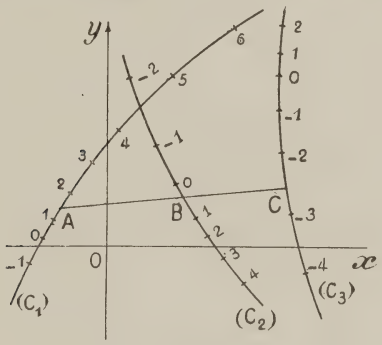

Fig. 12.

des formules (24), c'est-à-dire de mettre la relation $f(a, b, c) = 0$ sous la forme (26) ; cela se fait par tâtonnements, et d'ailleurs cela n'est pas toujours possible, bien que cette impossibilité se présente rarement dans la pratique (1).

Habituellement, il arrive que l'on peut choisir ces fonctions de plusieurs manières ; or il y a évidemment intérêt à faire ce choix de telle sorte, que les courbes

(1) Voir à ce sujet l'ouvrage cité, de M. d'Ocagne.

(C_1), (C_2), (C_3) soient aussi simples et d'une lecture aussi claire que possible ; par exemple on tâchera d'avoir des *droites* chaque fois qu'on le pourra.

Voici un cas très important où il en est ainsi :

Exemple. — Supposons que la fonction $f(a, b, c) = 0$ soit de la forme

$$u(a).\, v(c) + w(b) + h(c) = 0, \tag{27}$$

u, v, w, h étant des fonctions quelconques des variables indiquées respectivement ; on peut poser ici :

$$(C_1)\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = u(a) \end{cases} \qquad (C_2)\begin{cases} x_2 = +1 \\ y_2 = w(b) \end{cases} \qquad (C_3)\begin{cases} x_3 = \dfrac{1 - v(c)}{1 + v(c)} \\ y_3 = \dfrac{-h(c)}{1 + v(c)} \end{cases}$$

et la condition pour que ces trois points soient en ligne droite s'écrit, après réductions :

$$\frac{u(a).\, v(c) + w(b) + h(c)}{1 + v(c)} = 0.$$

On voit que cette condition est exactement la même que (27), sauf le dénominateur qui n'intervient que dans le cas exceptionnel où $1 + v(c) = 0$ (1).

Ici les courbes (C_1) et (C_2) sont des droites parallèles, faciles à graduer au moyen des valeurs de y ; il reste à construire l'échelle (C_3).

Cet exemple pourra être utilisé pour résoudre toutes les *équations trinomes* :

$$t^m + a\,t^n + b = 0 ;$$

ces équations sont en effet de la forme (27), où l'on a :

$$u = a, \quad v = t^n, \quad w = b, \quad h = t^m,$$

t jouant ici le rôle de c.

Dans le cas particulier où $m = 3$, $n = 1$, on obtient l'équation trinome du 3e degré :

$$t^3 + at + b = 0.$$

(1) C'est-à-dire pour les valeurs particulières de c qui donnent à v la valeur (-1) ; nous n'insistons pas sur ce cas, qui n'a guère d'intérêt.

On aura un abaque à points alignés, d'après la théorie ci-dessus, en construisant les 3 échelles :

$$(C_1)\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = a \end{cases} \qquad (C_2)\begin{cases} x_2 = +1 \\ y_2 = b \end{cases} \qquad (C_3)\begin{cases} x_3 = \dfrac{1-t}{1+t} \\ y_3 = \dfrac{-t^3}{1+t} \end{cases}$$

Il suffit de dessiner la partie de (C_3) qui correspond à t positif ; les racines négatives de l'équation précédente sont en effet les racines *positives* de l'équation $(-t)^3 + a(-t) + b = 0$ ou $t^3 + at - b = 0$, laquelle se résout par le même abaque. On obtient ainsi l'abaque de la figure 13.

Cet abaque est dessiné très sommairement : pour avoir un abaque un peu précis, il faudrait graduer la courbe pour des valeurs t variant de dixièmes en dixièmes, au moins.

Si l'on veut alors résoudre l'équation

$$t^3 - 3{,}6\,t + 2{,}1 = 0,$$

on prend sur l'axe a le point d'ordonnée $(-3{,}6)$, et sur l'axe b le point d'ordonnée $+2{,}1$: la droite qui joint ces points coupe la courbe en deux points dont les paramètres, évalués à vue, sont environ 0,8 et 1,5.

Ce sont, grossièrement, les racines positives de l'équation. On aura la 3e racine, qui est négative, en prenant l'équation $t^3 - 3{,}6\,t - 2{,}1 = 0$ et en cherchant la racine positive de cette équation par le même procédé : on trouve environ 2,2 ; les trois racines sont donc, *à peu près*,

$$-2{,}2 \qquad +0{,}8 \qquad +1{,}5.$$

Inversement, en prenant 3 courbes quelconques et en formant la condition pour que 3 points, situés respectivement sur ces 3 courbes, soient en ligne droite, on obtiendra un type d'équations qui sera résoluble par l'abaque des 3 courbes ; c'est ainsi qu'on peut former des types d'équations résolubles

par un abaque formé de 3 droites (parallèles ou non), 2 droites et une circonférence, etc.

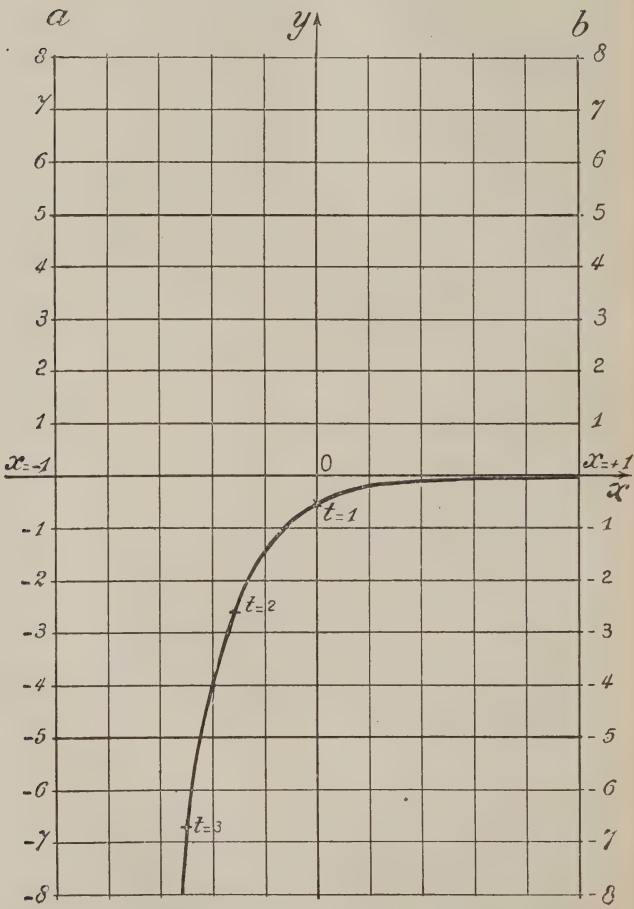

Fig. 13.

Prenons par exemple 3 droites concourantes faisant entre elles les angles $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 60°$. Choisissons sur ces droites les sens positifs indiqués par les flèches (fig. 14) ; nous prendrons comme axes de coordonnées $\overline{OA}$ d'une part et une perpendiculaire $\overline{Oy}$ à cet axe.

Soient 3 points M, N, P, situés respectivement sur ces droites et définis par les valeurs algébriques

$$a = \overline{OM}, \qquad b = \overline{ON}, \qquad c = \overline{OP} ;$$

leurs coordonnées sont

$$M\begin{cases} x = a \\ y = o \end{cases} \qquad N\begin{cases} x = \dfrac{b}{2} \\ y = \dfrac{b\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad P\begin{cases} x = -\dfrac{c}{2} \\ y = \dfrac{c\sqrt{3}}{2} \end{cases} ;$$

la condition pour qu'ils soient en ligne droite, donnée par la formule (23), s'écrit ici, toutes réductions faites,

$$bc + ab = ac,$$

ou

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b}.$$

La fig. 14 constitue donc un abaque qui permettra de résoudre les équations du type précédent (par exemple les for-

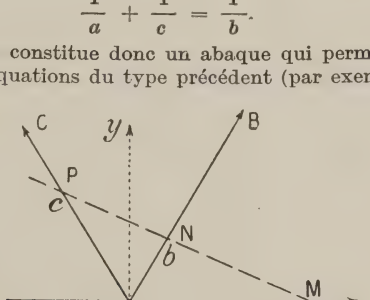

Fig. 14.

mules des lentilles minces). On graduera les droites à partir de 0, par rapport aux paramètres a, b, c respectivement. Cela fait, si on connaît deux de ces quantités, a et b par exemple, cela

permettra de situer les points M et N sur la figure et, par suite, d'en déduire la position du point P, c'est-à-dire le nombre c, par simple lecture.

Pour les formules contenant 4 variables, $f(a,b,c,d)=0$, il faut construire des abaques composés, c'est-à-dire tracer sur la même feuille les abaques correspondants à la formule précédente pour diverses valeurs de d. On peut aussi utiliser des abaques de nature différente (abaques à double alignement, etc.) ; nous renverrons pour ces questions, ainsi que pour le cas de plus de 4 variables, au livre déjà cité de M. d'Ocagne (voir la note au bas de la p. 74).

Chapitre IV

LES SÉRIES

---

34. Convergence. — L'étude proprement dite des séries, et en particulier de leur convergence ou divergence, n'entre pas dans le cadre de ce volume (1) ; nous rappellerons simplement, pour mémoire, les *règles de convergence* les plus élémentaires.

Une série est toujours divergente si son terme général ne tend pas vers zéro, lorsque son rang s'élève indéfiniment.

Si l'on constate que le terme général tend vers zéro, cela ne prouve pas que la série soit convergente ; on peut alors tenter l'étude directe de la convergence, c'est-à-dire examiner si la somme des n premiers termes tend vers une limite finie, lorsque n augmente indéfiniment.

Exemple : série qui a pour terme général $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

En remarquant que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on voit que, si on écrit la série jusqu'au $n^{\text{ième}}$ terme inclusivement, il y a des réductions qui s'effectuent et il reste

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(1) Voir pour une étude assez détaillée l'ouvrage de M. E. Fabry : *Théorie des séries à termes constants* (Paris, Hermann, 1911).

Il est visible que cette expression tend vers 1 lorsque n augmente indéfiniment.

Ce moyen réussit très rarement dans la pratique ; on a alors recours à diverses règles dont nous ne rappelons ici que les plus simples :

Séries à termes positifs, 1re règle. — Si l'expression $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ reste, à partir d'un certain rang, inférieure ou égale à une borne $k < 1$, la série converge (1). Si cette expression reste supérieure à 1, à partir d'un certain rang, la série diverge.

On peut aussi chercher la limite de l'expression $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

Si cette limite est inférieure à 1, la série converge ; si cette limite est supérieure à 1, la série diverge.

Dans le cas où cette limite serait égale à 1, la règle ci-dessus ne conclut pas, sauf si $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ tendait vers 1, par valeurs supérieures, auquel cas la série diverge.

Séries à termes positifs, 2e règle.— Cette règle s'énonce exactement comme ci-dessus, mais en prenant $\sqrt[n]{U_n}$ au lieu de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

Remarque. — Les deux règles ci-dessus reviennent au fond à la suivante : si une série à termes positifs a ses termes inférieurs ou égaux à ceux d'une progression géométrique de raison inférieure à l'unité, elle est convergente ; sous cette forme, cette proposition est évidente.

(1) Remarquer qu'il ne suffit pas que $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ pour que la série converge ; mais il suffit que ce rapport reste supérieur à 1 pour qu'elle diverge.

Série à termes positifs, 3e règle. — Si, pour une certaine valeur de l'exposant α, l'expression $n^\alpha U_n$ tend vers une limite finie et non nulle quand n augmente indéfiniment, la série U_n est de même nature que la série $\frac{1}{n^\alpha}$, c'est-à-dire :

si $\alpha > 1$, convergente,
si $\alpha \leqslant 1$, divergente.

Il est à remarquer que la valeur de α, si elle existe, n'est autre que *l'ordre infinitésimal* de U_n par rapport à $\frac{1}{n}$.

Séries à termes de signes quelconques, 4e règle. — Soit la série $U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$
et considérons la *série des modules*, formée par les valeurs absolues des termes précédents :

$$|U_1| + |U_2| + \ldots + |U_n| + \ldots$$

Si la série des modules converge, la série donnée converge aussi et sa somme est inférieure à celle de la série des modules.

Cette règle permet d'étudier les séries à signes quelconques au moyen des 3 premières règles, en appliquant celles-ci à la série des modules. On sait que cette règle s'applique aussi aux séries à termes imaginaires, et d'ailleurs l'étude de celles-ci se ramène strictement à celle des séries à termes réels.

Séries à termes alternativement positifs et négatifs, 5e règle. — Si dans une telle série, les termes vont en décroissant à partir d'un certain rang et tendent vers zéro, la série converge. Si la décroissance a lieu à partir du 1er terme, la somme de la série est comprise entre ce premier terme et 0.

Il faut remarquer que ces séries peuvent aussi s'étudier par la 4e règle, mais la 5e est d'une application beaucoup plus simple et souvent immédiate ; comme ces séries alternées se

rencontrent fréquemment dans la pratique, cette règle est très importante.

35. Calcul de la somme d'une série numérique.
Soit une série

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots \tag{28}$$

qu'on a reconnue convergente. Il n'existe aucun moyen général pour calculer exactement la valeur de la somme, et, dans la plupart des cas, il faut se borner à déterminer une valeur approchée. Appelons S_p la somme des p premiers termes.

$$S_p = U_1 + U_2 + \ldots + U_p ; \tag{29}$$

les termes suivants forment une série convergente, dont nous désignerons la somme par R_p, et qui est dite *reste de la série* (28) quand on limite celle-ci au terme de rang p :

$$R_p = U_{p+1} + U_{p+2} + \ldots \tag{30}$$

La somme cherchée est $S = S_p + R_p$; mais on sait que R_p tend vers zéro quand p augmente : la méthode consistera donc à prendre S_p comme valeur approchée, en choisissant p assez grand pour que la partie négligée R_p soit assez petite.

Nous commettrons dans ce calcul deux sortes d'erreurs :

1° Une *erreur systématique*, que nous désignerons par e_s , provenant de ce que nous remplaçons S par S_p : nous aurons une limite supérieure de cette erreur en évaluant une limite supérieure du reste R_p.

2° Des *erreurs de calcul*, provenant de ce que le calcul de S_p lui-même ne se fera pas exactement : en général on commettra une erreur de calcul sur chacun des termes U_1, U_2, ... U_p qui composent S_p : il dépendra de nous de faire ces erreurs aussi petites que nous voudrons.

Toutes ces erreurs s'ajoutent, comme d'habitude.

36. Limite supérieure de l'erreur systématique. — Si la convergence a été reconnue au moyen de la 1re règle, il existe une progression géométrique convergente dont les termes sont supérieurs respectivement à ceux de R_p (on dit : qui *majore* R_p) ; la somme de cette progression, qui est facile à calculer, sera la limite supérieure cherchée.

Pour avoir cette progression, on cherche un nombre $k < 1$ tel, qu'à partir de $n = p + 1$, on ait :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant k ;$$

la progression est alors $U_{p+1}\,[1 + k + k^2 + \ldots]$ et on a par suite : $R_p < \dfrac{U_{p+1}}{1 - k}$.

Exemple I. — Soit la série du nombre e :

$$(31) \qquad e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2\,!} + \ldots + \frac{1}{n\,!} + \ldots$$

On a ici :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{n} \text{ qui tend vers 0 ;}$$

donc la série est convergente (1re règle).

On a :

$$R_p = \frac{1}{p\,!} + \frac{1}{(p+1)\,!} + \ldots$$

D'autre part, pour $n \geqslant p + 1$, on a :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{n} < \frac{1}{p+1} ;$$

donc le nombre k peut être pris ici égal à $\dfrac{1}{p+1}$, et on peut dire $R_p < \dfrac{p+1}{p \times p\,!}$;

cela revient à dire que la progression

$$\frac{1}{p\,!}\left[1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + \ldots\right]$$

majore la série R_p, ce qui est évident.

En prenant, pour calculer le nombre e, les p premiers termes

de la série, on commettra de ce fait une erreur systématique inférieure à $\frac{p+1}{p \times p!}$. A cette erreur s'ajouteront les erreurs de calcul commises sur les termes conservés. Nous reprendrons plus loin cet exemple.

Si la convergence a été reconnue par la 2e *règle*, il existe un nombre de $k < 1$ tel que $\sqrt[n]{U_n} < k$; par suite le reste est majoré par la progression

$$k^{p+1} + k^{p+2} + \dots$$

et on a immédiatement une limite supérieure, qui est $\frac{k^{p+1}}{1-k}$.

Si la convergence a été reconnue par la 3e *règle*, il n'existe alors aucune progression géométrique convergente qui majore le reste ; mais on peut toujours trouver un nombre K tel, que la série $\frac{K}{n^\alpha}$ majore la série donnée, à partir du $p^{\text{ième}}$ rang tout au moins : ce nombre K s'aperçoit d'habitude très facilement ; il faut tâcher de le choisir aussi petit que possible (1).

Dans ces conditions, le reste de la série étudiée est évidemment inférieur au reste correspondant de la série $\frac{K}{n^\alpha}$.

Or, l'étude de la série $\frac{1}{n^\alpha}$ montre qu'on a :

$$(32) \qquad \frac{1}{(p+1)^\alpha} + \frac{1}{(p+2)^\alpha} + \dots < \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}} \cdot \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

On peut aussi démontrer (2) que

$$(33) \qquad \frac{1}{(p+1)^\alpha} + \frac{1}{(p+2)^\alpha} + \dots < \frac{1}{(\alpha-1)\ p^{\alpha-1}}$$

(1) K doit être supérieur à la limite de $n^\alpha U_n$, mais il peut être choisi d'autant plus voisin de cette limite que p est plus grand.

(2) Voir l'ouvrage, cité plus haut, de M. Fabry.

On choisira l'une ou l'autre de ces limites ; d'une manière générale, la 2e est plus avantageuse si α n'est pas voisin de 1. Cette limite, multipliée par K, sera supérieure au reste de la série $\frac{K}{n^{\alpha}}$ et, par suite, à R_p.

Exemple II. — Soit la série de terme général $U_n = \frac{n+2}{2n^4+1}$.

On voit ici que $n^3 U_n = \frac{n^4 + 2n^3}{2n^4+1}$ a pour limite $\frac{1}{2}$ quand n augmente indéfiniment.

Ici $\alpha = 3$, donc la série converge ; en outre on voit que dès le premier rang, on a :

$$\frac{n+2}{2n^4+1} < \frac{1}{n^3},$$

c'est-à-dire,

$$n^4 + 2n^3 < 2n^4 + 1,$$

ou

$$n^3(n-2) + 1 \geqslant 0,$$

ce qui est évident. On peut même avoir une inégalité plus avantageuse :

$$\frac{n+2}{2n^4+1} < \frac{\frac{2}{3}}{n^3},$$

ou

$$n^3(n-6) + 2 > 0,$$

ce qui a évidemment lieu dès que $n > 6$.

Par conséquent, si $p \geqslant 5$, le reste R_p est inférieur au reste correspondant de la série $\frac{2}{3n^3}$ (ici $K = \frac{2}{3}$) ; en prenant par exemple la formule (32), on aura donc, si $p \geqslant 5$:

$$R_p < \frac{2}{3} \times \frac{1}{(p+1)^2} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9(p+1)^2}.$$

Si la série n'a pas ses termes tous positifs (4e *règle*), son reste R_p sera inférieur en valeur absolue à celui de la série des modules ; celui-ci étant positif se traitera comme précédemment.

Enfin si la série est *alternée* (5e *règle*) *et décroissante*, à partir du $(p+1)^e$ rang tout au moins, le reste R_p

est lui-même une série alternée dont le premier terme est U_{p+1} ; on sait que R_p est compris entre 0 et U_{p+1}. Par suite R_p est inférieur, en valeur absolue, à $|U_{p+1}|$.

Dans ce cas l'erreur systématique est inférieure à la valeur absolue du premier terme négligé.

Nous en verrons des exemples au § 38 (ex. V, VI et VII).

37. Calcul de la somme d'une série numérique avec une approximation demandée. — Tous les problèmes relatifs aux calculs des séries qui entrent dans les catégories ci-dessus se font aisément au moyen des résultats qui précèdent. Nous ne traiterons que quelques exemples.

Exemple III. — Calculer le nombre e avec une erreur absolue inférieure à 0,001.

Reportons-nous à l'ex. I, p. 91, et prenons p termes. Nous avons calculé une limite supérieure de l'erreur systématique ; appelons d'autre part α la somme des erreurs de calcul ; il faudra avoir :

$$\frac{p+1}{p \times p!} + \alpha < \frac{1}{1000}.$$

Prenons, comme d'habitude, l'erreur systématique inférieure à la moitié de l'erreur totale : il faut pour cela

$$\frac{p+1}{p \times p!} < \frac{1}{2000}.$$

On voit, par tâtonnements, qu'il faut $p = 7$, et dans ce cas l'erreur systématique sera non seulement inférieure à $\frac{1}{2000}$, mais d'une manière plus précise

$$\frac{p+1}{p \times p!} = \frac{1}{4\,410} < \frac{1}{4000}.$$

Nous garderons la valeur $\frac{1}{4000}$ qui est simple.

Il reste à calculer le nombre

$$S_7 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$$

de manière que la somme des erreurs de calcul ne dépasse pas $\frac{1}{1000} - \frac{1}{4000} = \frac{3}{4000}$.

Les trois premiers termes se calculent exactement ; il faudra calculer les 4 autres avec 4 décimales chacun, ce qui donne :

$S_7 = 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}1667 + 0{,}0417 + 0{,}0083 + 0{,}0014$,

en effectuant

$$S_7 = 2{,}7181.$$

Nous avons commis en tout 4 erreurs de calcul, inférieures chacune à $\frac{1}{20.000}$; en y ajoutant l'erreur systématique, cela fait en tout :

$$\frac{1}{4000} + \frac{4}{20\,000} = \frac{9}{20\,000},$$

ce qui est largement inférieur à 0,001. En supprimant la 4e décimale du résultat, nous commettrons une nouvelle erreur égale à 0,0001, ce qui donne en tout :

$$\frac{9}{20\,000} + \frac{1}{10\,000} = \frac{11}{20\,000} < \frac{1}{1000}.$$

Donc nous pouvons prendre $e = 2{,}718$, valeur approchée à moins de $\frac{1}{1000}$ près.

Exemple IV. — Soit à calculer la somme de la série de l'exemple II, $U_n = \frac{n+2}{2n^4+1}$ avec une erreur *relative* inférieure à 0,05.

Ecrivons les premiers termes :

$$S = 1 + \frac{4}{33} + \frac{5}{163} + \frac{6}{513} + \frac{7}{1251} + \ldots$$

On doit avoir : $e_r = \frac{e_a}{S} < 0{,}05$.

Or, $S > 1$, visiblement ; il suffit donc de prendre l'erreur absolue e_a inférieure à 0,05, pour que e_r le soit aussi.

On a, d'après les calculs faits à l'exemple II :

$$e_a < \frac{8}{9\,(p+1)^2} + \alpha\,;$$

on prendra tout d'abord $\frac{8}{9\,(p+1)^2} < \frac{1}{40}$, c'est-à-dire $p = 5$, ce qui donne comme erreur systématique :

$$\frac{8}{9\,(p+1)^2} = \frac{8}{324} < \frac{1}{40}\,.$$

Il faut donc calculer les 5 premiers termes, de façon que les erreurs de calcul ne dépassent pas $\frac{1}{40}$; pour cela, il suffit de calculer chaque terme avec 3 décimales et de n'en conserver que 2, la seconde étant forcée s'il y a lieu, ce qui donne :

$$S = 1 + 0{,}12 + 0{,}03 + 0{,}01 + 0{,}01 = 1{,}17.$$

L'erreur sur chaque terme étant inférieure à $\frac{1}{200}$, la somme des erreurs (systématique et de calcul) est inférieure à

$$\frac{1}{40} + \frac{5}{200} = \frac{1}{20}\,;$$

on peut donc donner comme résultat

$$S = 1{,}17.$$

38. Séries entières. — On appelle ainsi les séries de la forme suivante :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{34}$$

où les quantités $a_0, a_1, a_2 \ldots$ sont des constantes données.

On démontre que ces séries sont convergentes pour les valeurs de x comprises dans un certain *intervalle de convergence*

$$-R < x < +R.$$

Le *rayon de convergence* R peut d'ailleurs être nul, ou infini. Lorsque x est à l'intérieur de l'intervalle de convergence, la série (34) est toujours *absolument convergente*, c'est-à-dire que la série des modules converge aussi ; pour $x = \pm R$, il peut arriver que la série converge ou diverge, ainsi que sa série des modules : cela dépend des cas.

Les propriétés des séries entières peuvent se résumer sommairement en disant que, pourvu que x reste à l'intérieur de l'intervalle de convergence, ces propriétés sont celles des polynomes : on peut les ajouter, les multiplier, les diviser, les dériver ou les intégrer, comme on le ferait s'il s'agissait de polynomes.

Lorsque la série converge, c'est-à-dire si $|x| < R$, il est évident que la valeur de sa somme dépend de celle de x et, par suite, que cette somme est une fonction $f(x)$.

Inversement, étant donnée une fonction $f(x)$, on peut se demander s'il existe une série entière qui ait pour somme $f(x)$: la réponse à cette question est fournie par la théorie du *développement en série de Mac-Laurin*.

Nous rappelons ci-dessous les résultats de cette étude en ce qui concerne les fonctions les plus usuelles ; il est nécessaire d'insister sur le fait que *les égalités écrites n'ont lieu que dans l'intervalle de convergence.*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (R = \infty)$$

$$\mathrm{Log}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (R = 1)$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (R = \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (R = \infty)$$

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.\,n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (R = 1)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\mathrm{arc\,tg}\, x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad (R = 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (R=1).$$

On sait que ces séries sont très commodes pour les calculs numériques à faire sur les fonctions qu'elles représentent et en particulier pour calculer ces fonctions elles-mêmes. Par exemple pour calculer $\sqrt[3]{e}$, on écrirait cette expression $e^{\frac{1}{3}}$ et on utiliserait la première des séries ci-dessus en y faisant $x = \frac{1}{3}$.

Il faut remarquer tout spécialement la dernière des séries indiquées : celle-ci est très générale, puisqu'elle s'applique quelle que soit la valeur de m (positive ou négative, rationnelle ou non). C'est ainsi qu'on en tire :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35x^4}{128} + \ldots$$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} + \frac{35x^4}{243} + \ldots$$

Il est à remarquer que si $0 < x < 1$, ces séries sont alternées et décroissantes ; on voit immédiatement une limite supérieure de l'erreur systématique en regardant le premier terme négligé ; c'est ainsi, par exemple, que si l'on remplace $\sqrt[3]{1+x}$ par $1 + \frac{x}{3}$, l'erreur systématique est inférieure à $\frac{x^2}{9}$ en valeur absolue.

On peut en dire autant, bien entendu, des autres

séries ci-dessus, quand elles sont alternées décroissantes : $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, etc.

Nous allons donner quelques exemples de calcul de fonctions au moyen des séries.

Exemple V. — Soit à calculer le sinus de l'angle de 1 degré, avec une erreur absolue inférieure à 0,001.

Il faut d'abord remarquer que l'angle de 1° correspond à un arc de $x = \dfrac{\pi}{180}$; prenons alors la série du sinus, en y faisant $x = \dfrac{\pi}{180}$; cette série étant alors alternée décroissante, l'erreur systématique sera inférieure au premier terme négligé. Si nous ne prenons qu'un terme, cette erreur sera donc inférieure à

$$\frac{x^3}{3!} = \frac{\pi^3}{6 \times (180)^3} < \frac{4^3}{6 \times (180)^3} = \frac{1}{6.(45)^3} < \frac{1}{500\,000}.$$

Cette quantité étant inférieure à la moitié de l'erreur totale permise, on voit qu'il est amplement suffisant de prendre un seul terme ; donc

$$\sin 1° = \frac{\pi}{180} \qquad \text{avec } e_3 < \frac{1}{500\,000} ;$$

si nous effectuons le calcul avec 3 décimales, en corrigeant la dernière, nous commettrons ainsi une erreur de calcul inférieure à $\dfrac{1}{2000}$, ce qui fait :

$$\text{erreur totale} < \frac{1}{500\,000} + \frac{1}{2000} < \frac{1}{1000}.$$

Nous sommes donc dans les limites voulues et nous pouvons écrire :

$$\sin 1° = 0{,}017.$$

Exemple VI. — Calcul de π, par la formule de Méchain, avec une erreur absolue inférieure à 0,001.

Cette formule, qu'il est aisé de vérifier rigoureusement, est

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$

Nous l'écrirons

$$\pi = 16 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}.$$

Les deux termes du second membre se calculent au moyen de la série arc tg x ; on a :

$$(35) \quad 16 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} = \frac{16}{5} - \frac{16}{3.5^3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{16}{(2n-1).5^{2n-1}} + \ldots,$$

$$(36) \quad 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{4}{239} - \frac{4}{3.(239)^3} + \ldots.$$

Ces séries sont alternées décroissantes. Si, dans la seconde, nous ne conservons que le premier terme, nous commettons ainsi une erreur systématique extrêmement petite :

$$\frac{4}{3 \times (239)^3} < \frac{1}{6\,000\,000}.$$

Pour la série (35), il faudra prendre 3 termes au moins, sans quoi l'erreur sur cette série dépasserait à elle seule la limite permise de 0,001 ; en prenant 3 termes, l'erreur systématique sur cette série sera inférieure à

$$\frac{16}{7.5^7} < \frac{3}{100\,000}.$$

Donc, si on prend

$$\pi = \frac{16}{5} - \frac{16}{3.5^3} + \frac{16}{5.5^5} - \frac{4}{239},$$

on commet une erreur systématique totale inférieure à

$$\frac{1}{6\,000\,000} + \frac{3}{100\,000} < \frac{1}{30\,000}.$$

Il suffit donc de calculer l'expression précédente de manière que le total des erreurs de calcul ne dépasse pas $\frac{29}{30\,000}$; on voit immédiatement qu'il suffit pour cela de calculer chaque fraction avec 4 décimales, sans même avoir besoin de corriger la 4e, c'est-à-dire de calculer la cinquième ; on trouve ainsi :

$$\pi = 3{,}2 - 0{,}0426 + 0{,}0010 - 0{,}0167 = 3{,}1417.$$

En écrivant $\pi = 3{,}142$ nous commettrions une nouvelle erreur, égale à 0,0003 ; le total des erreurs s'élèverait alors, au maximum, à

$$\frac{1}{30\,000} + \frac{3}{10\,000} + \frac{3}{10\,000} = \frac{19}{30\,000} < \frac{1}{1000}.$$

Nous sommes donc encore dans les limites voulues, et la réponse est $\pi = 3{,}142$.

Exemple VII. — Soit à calculer le nombre $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4{,}21}}$ avec une erreur absolue inférieure à 0,001.

Il faut d'abord préparer le calcul, c'est-à-dire transformer cette expression pour la ramener à l'une des formes simples dont nous avons donné le développement en série. Nous écrirons :

$$4{,}21 = 4 \times 1{,}0525,$$

donc $\sqrt[3]{4{,}21} = \sqrt[3]{4} \times (1 + 0{,}0525)^{\frac{1}{3}}$;

d'ailleurs, $\sqrt[3]{4} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}$.

Par suite :

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4{,}21}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \times (1 + 0{,}0525)^{-\frac{1}{3}}.$$

Le nombre $\sqrt[3]{2}$ se trouve dans les tables ; le deuxième facteur se calculera au moyen de la série $(1 + x)^m$.

L'erreur commise sur un produit de 2 facteurs $x\,y$ a pour limite : $\varepsilon_x \times$ borne sup. de $|y| + \varepsilon_y \times$ borne sup. de $|x|$;

ici : borne sup. de $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2} = 1$,

borne sup. de $(1 + 0{,}0525)^{-\frac{1}{3}} = 1$;

donc il suffit que

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y < \frac{1}{1000}.$$

Nous prendrons pour cela chacune des erreurs, commises sur chaque facteur, inférieure à $\dfrac{1}{2000}$.

1° Calcul de $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$. Les tables donnent :

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}260, \quad \text{erreur} < \frac{1}{2000} ;$$

donc $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2} = 0{,}630$, erreur $< \dfrac{1}{4\,000}$.

2° Calcul de $(1 + 0{,}0525)^{-\frac{1}{3}}$ avec une erreur inférieure à $\dfrac{1}{2000}$.

On a vu que

$$(1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} + \frac{35x^4}{243} + \dots ;$$

ici $x = 0{,}0525$ et la série est alternée décroissante ; en ne conservant que 2 termes, on a :

$$e_2 < \frac{2}{9}x^2 = \frac{2}{9} \times \frac{(525)^2}{10^8} = 0{,}0006125 < \frac{7}{10\,000}.$$

Comme le nombre $\dfrac{x}{3}$ se calcule exactement, nous n'aurons pas ici d'erreur de calcul ; et il vient :

$$(1{,}0525)^{-\frac{1}{3}} = 1 - 0{,}0175 = 0{,}9825,$$

et finalement, le nombre demandé est

$$0{,}63 \times 0{,}9825 = 0{,}618975.$$

Récapitulons les erreurs commises :

Sur $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$, $\qquad \varepsilon_x < \dfrac{1}{4000}$.

Sur $(1{,}0525)^{-\frac{1}{3}}$, $\quad \varepsilon_y < \dfrac{7}{10\,000}$,

soit en tout : $e < \dfrac{1}{4000} + \dfrac{7}{10\,000} = \dfrac{38}{40\,000}$.

Si nous ne conservons dans le résultat ci-dessus que 3 décimales, en prenant 0,619, nous commettons une nouvelle erreur inférieure à $\dfrac{1}{20\,000}$. Or,

$$\frac{38}{40\,000} + \frac{1}{20\,000} = \frac{40}{40\,000} = \frac{1}{1000}.$$

Donc nous sommes dans les limites voulues et nous garderons

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4{,}21}} = 0{,}619.$$

Exemple VIII. — Calcul direct des logarithmes népériens (1).

On a vu que

$$\text{Log}\,(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

d'où $$\text{Log}\,(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

et par soustraction,

$$\text{Log}\,\frac{1+x}{1-x} = 2\left[\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right],$$

valable pour $-1 < x < +1$. Faisons-y $x = \dfrac{1}{2n+1}$, n étant un nombre entier ; il vient :

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$$

et, par suite :

$$\text{Log}\,(n+1) = \text{Log}\,n + 2\left[\frac{1}{(2n+1)} + \frac{1}{3\,(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \ldots\right].$$

Cette formule montre que, pour avoir le *Log.* d'un nombre $(n+1)$, il faut ajouter au *Log.* du nombre précédent n la série indiquée ; or cette série converge très rapidement : on voit en effet que si on se borne au premier terme, par exemple, le reste est inférieur à la progression

$$\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{(2n+1)^5} + \frac{1}{(2n+1)^7} + \ldots\right] = \frac{1}{6n(n+1)(2n+1)},$$

nombre qui décroît très vite.

(1) On sait que les logarithmes décimaux se déduisent des népériens en multipliant ceux-ci par M = 0,4342945...

Chapitre V

INTÉGRALES DÉFINIES. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Le calcul d'une intégrale définie se fait théoriquement, au point de vue élémentaire, au moyen de la recherche préalable d'une *primitive* $\varphi(x)$ de la fonction à intégrer $f(x)$; on a ainsi :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) ;$$

mais cette primitive est souvent impossible à former, c'est-à-dire à exprimer au moyen des fonctions habituelles (1) ; d'ailleurs, même quand on la connaît, il peut se faire que le calcul effectif $\varphi(b) - \varphi(a)$ soit assez compliqué pour qu'il y ait intérêt à s'en passer et à utiliser les méthodes de calcul approché que nous allons indiquer.

39. Calcul par un développement en série. — Si la fonction à intégrer $f(x)$ peut se développer en série entière, et si l'intervalle d'intégration (a, b) est contenu dans l'intervalle de convergence $(-R, +R)$, on sait

(1) On trouvera à la fin de ce volume une table donnant les fonctions primitives fondamentales qui se rencontrent le plus fréquemment (table VIII).

qu'on peut intégrer la série terme à terme, comme pour un polynome.

Il ne reste plus qu'à calculer les séries, par les méthodes du chapitre précédent.

Ce moyen est extrêmement commode, et en général rapide.

Exemple I. — Soit à calculer $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

L'intégrale est elliptique, et c'est en vain qu'on chercherait la primitive ailleurs que dans la théorie particulière de ces fonctions (voir chap. VI).

Mais on peut remarquer ici que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^6 - \dots + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n.\,n!}x^{3n} + \dots$$

L'intervalle de convergence est $(-1, +1)$: il contient l'intervalle d'intégration ; intégrons terme à terme :

$$I = \left[\frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + \frac{3}{8}\frac{x^7}{7} - \dots + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n.\,n!}\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \dots\right]_0^{\frac{1}{2}};$$

il faut faire d'abord $x = \frac{1}{2}$, puis $x = 0$ et retrancher les deux séries ainsi obtenues ; mais comme la deuxième a tous ses termes nuls, on a :

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{3}{8\times 7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 - \dots + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2^n \times n! \times (3n+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1} + \dots$$

Cette série est alternée décroissante ; nous ne pouvons avoir sa somme que d'une manière approchée : supposons par exemple qu'on veuille calculer I avec une erreur absolue inférieure à 0,001. Ce problème a été traité précédemment (voir § 38, ex. V, VI et VII).

On prendra assez de termes pour que l'erreur systématique

soit inférieure à $\frac{1}{2000}$ au moins ; le troisième terme est

$$\frac{3}{7 \times 8 \times 2^7} = \frac{3}{7168} < \frac{1}{2000}.$$

Donc il suffit de prendre 2 termes, et de faire le calcul de telle sorte que la somme des erreurs de calcul ne dépasse pas $\frac{1}{2000}$; or on a :

$$\frac{1}{2 \times 4 \times 16} = \frac{1}{128} = 0{,}0077\ldots ;$$

en prenant 0,008 l'erreur est justement inférieure à $\frac{1}{2000}$ et on a par conséquent :

$$I = 0{,}5 - 0{,}008 = 0{,}492.$$

On pourrait remarquer ici que les deux erreurs commises ont toutes deux pour effet de diminuer I, puisque le reste de la série est de même signe que son premier terme. Donc notre résultat est approché *par défaut*, c'est-à-dire que

$$0{,}492 < I < 0{,}493.$$

Exemple II. — Calcul de $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$, avec une erreur absolue inférieure à 0,01.

Le calcul se fait exactement comme le précédent ; on connaît le développement en série de e^x, et par suite de e^{-x^2} :

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Le rayon de convergence étant ici infini, on a :

$$I = \left[\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \times 3} + \frac{x^5}{2! \times 5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! \times (2n+1)} + \ldots\right]_0^1,$$

$$I = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2! \times 5} - \frac{1}{3! \times 7} + \frac{1}{4! \times 9} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n! \times (2n+1)} + \ldots ;$$

il faut calculer cette série avec une erreur inférieure à 0,01.

Le cinquième terme est $\frac{1}{4\,!\times 9} = \frac{1}{216}$; il est inférieur à la moitié de l'erreur totale.

Nous prendrons donc 4 termes :

$$I = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \quad \text{avec } e_3 < \frac{1}{200}.$$

Calculons chaque terme avec 3 décimales, en corrigeant la dernière,

$$I = 1 - 0{,}333 + 0{,}1 - 0{,}024 = 0{,}743 ;$$

nous avons commis ainsi deux erreurs, inférieures chacune à $\frac{1}{2000}$, soit, en tout, $\frac{1}{1000}$ au maximum ; en supprimant la 3e décimale nous commettrons une nouvelle erreur de $\frac{3}{1000}$, et en tenant compte de l'erreur systématique, le total des erreurs est inférieur à

$$\frac{1}{200} + \frac{1}{1000} + \frac{3}{1000} = \frac{9}{1000} < \frac{1}{100}.$$

Nous sommes donc dans les limites fixées et nous pouvons écrire $I = 0{,}74$.

40. Formule de Simpson. — La méthode exposée dans le paragraphe précédent donne la valeur *exacte* de l'intégrale sous forme de série : ce n'est pas à proprement parler une méthode de calcul approché. Mais elle n'est pas toujours applicable.

Il existe beaucoup de formules donnant des valeurs approchées d'une intégrale ; nous n'en indiquerons que deux, qui sont très simples et qui permettent de connaître facilement le degré d'approximation.

Etant donnés 3 points, ayant respectivement pour coordonnées (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), on sait qu'il est très facile de déterminer un polynome du second degré tel, que la courbe

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

passe par ces 3 points. Ce problème a été étudié au paragraphe 20, et il est entièrement résolu par la formule de Lagrange.

L'aire comprise entre cette courbe et l'axe ox, limitée par les ordonnées extrêmes x_1 et x_3, a pour valeur

$$S = \int_{x_1}^{x_3} y\,dx$$

$$= \frac{x_3 - x_1}{6}\left[2\alpha\,(x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2) + 3\beta\,(x_3 + x_1) + 6\gamma\right].$$

Ce résultat est particulièrement simple lorsque x_2 est au milieu du segment (x_1, x_3), c'est-à-dire lorsque $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$; en remplaçant α, β, γ par leur valeur (tirée de la formule de Lagrange), on trouve alors :

$$S = \frac{x_3 - x_1}{6}\left[y_1 + 4y_2 + y_3\right].$$

Cela posé, soit une fonction $f(x)$, que nous considérons pour $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$; nous supposerons $f(x) > 0$ dans cet intervalle ; l'aire comprise entre cet arc de courbe et Ox sera

$$\int_{x_0}^{x_0 + h} f(x)\,dx = \varphi\,(x_0 + h) - \varphi\,(x_0),$$

en désignant toujours par $\varphi(x)$ une primitive de $f(x)$, laquelle n'intervient ici que provisoirement, et disparaîtra dans le résultat.

Prenons sur cet arc les 3 points qui ont pour abscisse :

$x_0, x_0 + \frac{h}{2}, x_0 + h$; par ces 3 points M_1, M_2, M_3 on peut faire aussi passer, comme on l'a vu ci-dessus, une parabole d'équation $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (sur la fig. 15, la courbe est dessinée en trait plein, tandis que la parabole est marquée en trait pointillé). L'aire comprise entre cet arc de parabole et Ox est égale à

$$\frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f(x_0 + h)\right], \tag{37}$$

d'après la formule précédente. Cette aire n'est pas égale à celle de la courbe, mais on peut la considérer comme une valeur approchée : on commettra ainsi une *erreur systématique* qui a pour expression la différence des deux aires, soit

$$(38) \qquad s = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) - \frac{h}{6}\left[f(x_0) + 4f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f(x_0+h)\right].$$

Nous allons chercher une limite supérieure de la valeur absolue de cette expression ; remarquons en passant que cette méthode revient à remplacer la courbe à intégrer par un arc de parabole du second degré qui a avec elle 3 points communs, c'est-à-dire à faire une interpolation parabolique de la fonction $f(x)$ entre x_0 et $x_0 + h$.

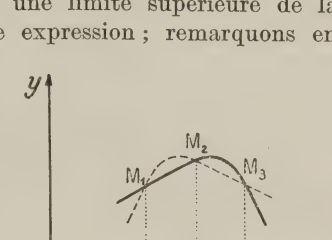

FIG. 15.

Dans les cas usuels les fonctions dont il s'agit sont développables par la formule de Taylor ; dans ces conditions, en tenant compte de ce que $\varphi'(x) = f(x)$, on a :

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = h f(x_0) + \frac{h^2}{2} f'(x_0) + \frac{h^3}{6} f''(x_0) + \frac{h^4}{24} f'''(x_0) + \frac{h^5}{120} f^{IV}(x_0 + \theta h),$$

$$f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = f(x_0) + \frac{h}{2} f'(x_0) + \frac{h^2}{8} f''(x_0) + \frac{h^3}{48} f'''(x_0) + \frac{h^4}{384} f^{IV}(x_0 + \theta' h),$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h\,f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \frac{h^4}{24} f^{IV}(x_0 + \theta'' h);$$

les quantités désignées par θ, θ', θ'', sont des nombres inconnus compris entre 0 et 1. En portant ces expressions dans la formule (38), on trouve sans peine :

$$s = \frac{h^5}{24}\left[\frac{1}{5} f^{IV}(x_0 + \theta h) - \frac{1}{24} f^{IV}(x_0 + \theta' h) - \frac{1}{6} f^{IV}(x_0 + \theta'' h)\right].$$

Soit M une borne supérieure (1) de la valeur absolue de la dérivée quatrième $f^{IV}(x)$ dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$; comme les nombres $x_0 + \theta h$, $x_0 + \theta' h$, $x_0 + \theta'' h$ sont compris dans cet intervalle, on a en valeur absolue :

$$(39) \quad |s| \leqslant \frac{h^5}{24}\left[\frac{M}{5} + \frac{M}{24} + \frac{M}{6}\right] = \frac{49\,M h^5}{2880} < \frac{2}{100} M h^5.$$

Nous garderons cette dernière valeur qui est plus simple.

Ceci va nous conduire immédiatement à la formule de Simpson. Revenons au problème posé, et soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Nous supposerons $a < b$, et en outre $f(x) > 0$ dans l'intervalle ; on sait d'ailleurs qu'il est très facile de ramener toujours le calcul à ce cas (en décomposant l'intervalle en plusieurs autres, ou bien en déplaçant les axes de coordonnées).

(1) Voir le § 18 et la remarque faite p. 29, sur la manière de calculer M.

Nous diviserons l'intervalle (a, b) en n parties, égales à $h = \frac{b-a}{n}$; par les points de subdivision, menons des parallèles à Oy qui déterminent sur la courbe les points intermédiaires M_1, M_2... etc. Nous découpons ainsi l'aire à calculer en petites bandes parallèles à Oy.

Pour chacune de ces bandes, nous prendrons une valeur approchée de sa surface au moyen de l'interpolation parabolique indiquée ci-dessus, c'est-à-dire au moyen de la formule (37) ; l'aire de la $p^{\text{ième}}$ bande sera ainsi égale à

$$\frac{h}{6}\left[f\left[a+(p-1)h\right]+4f\left(a+\frac{2p-1}{2}h\right)+f(a+ph)\right],$$

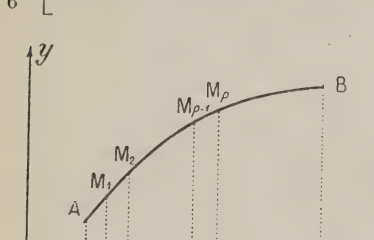

Fig. 16.

l'erreur systématique étant donnée par la formule (39).

L'aire cherchée, qui est la somme des aires de toutes les bandes, aura donc pour valeur approchée la somme des expressions ci-dessus, obtenues en faisant successivement $p = 1, 2, \ldots, n$. On a ainsi :

$$\text{(40)}\quad \begin{aligned} I = \frac{h}{3}\Bigg[&\frac{f(a)+f(b)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\\ &\ldots+f\left[a+(n-1)h\right]\Bigg]+\frac{2h}{3}\Bigg[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+\ldots\\ &+f\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Nous allons évaluer maintenant une limite supérieure de l'erreur systématique entraînée par cette formule.

Soit M une borne supérieure de la valeur absolue $|f^{IV}(x)|$ *dans l'intervalle total* (a, b) ; il est évident que M sera aussi une borne supérieure de $|f^{IV}(x)|$ dans chacun des intervalles partiels, c'est-à-dire à l'intérieur de chaque bande; on peut donc dire que l'erreur, pour chaque bande, est inférieure à $\frac{2\,Mh^5}{100}$; par suite, l'erreur systématique totale sera inférieure à

$$\frac{2\,Mh^5}{100} \times n = \frac{2\,Mh^4}{100}\,(b-a), \tag{41}$$

car $$nh = b - a.$$

Les formules (40) et (41) résolvent complètement la question ; il est à remarquer que la formule (40) nécessite la connaissance de $(2n + 1)$ ordonnées, c'est-à-dire de $(2n + 1)$ points particuliers de la courbe.

41. Deuxième formule.— Reportons-nous à la fig. 15 ; nous avons remplacé l'arc de courbe par un arc de parabole qui a 3 points communs avec le premier ; cet arc de parabole est très voisin de la courbe, mais on peut, naturellement, remplacer la courbe par un arc qui s'en rapproche encore plus. On peut, par exemple, déterminer les 4 constantes α, β, γ, δ de telle sorte que la courbe

$$y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

passe par M_1 et M_3 (extrémités de l'arc) et admette en ces points la même tangente que la courbe $y = f(x)$. On obtient ces coefficients en résolvant les 4 équations

$$\alpha x_0^3 + \beta x_0^2 + \gamma x_0 + \delta = f(x_0),$$
$$\alpha (x_0 + h)^3 + \beta (x_0 + h)^2 + \gamma (x_0 + h) + \delta = f(x_0 + h),$$
$$3\alpha x_0^2 + 2\beta x_0 + \gamma = f'(x_0),$$
$$3\alpha (x_0 + h)^2 + 2\beta (x_0 + h) + \gamma = f'(x_0 + h).$$

La surface comprise entre ce nouvel arc et Ox est alors

$$S = \int_{x_0}^{x_0+h} (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)\, dx = \frac{\alpha}{4}\left[(x_0+h)^4 - x_0^4\right] + \frac{\beta}{3}\left[(x_0+h)^3 - x_0^3\right] + \frac{\gamma}{2}\left[(x_0+h)^2 - x_0^2\right] + \delta h ;$$

en tirant α, β, γ, δ des 4 équations et en portant dans la valeur précédente (ce calcul se fait sans difficulté en utilisant la théorie des déterminants, ou tout simplement en commençant par simplifier la valeur de S au moyen des relations précédentes), il vient :

$$(42) \quad S = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_0+h)\right] - \frac{h^2}{12}\left[f'(x_0+h) - f'(x_0)\right].$$

Nous allons trouver maintenant une limite supérieure de l'erreur systématique ainsi commise, c'est-à-dire de

$$s = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) - \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_0+h)\right] + \frac{h^2}{12}\left[f'(x_0+h) - f'(x_0)\right].$$

On pourrait opérer comme pour la formule (38), et on trouverait ainsi $|s| < \frac{31\,Mh^5}{30\times 24}$. Mais on peut ici, par une autre voie, trouver une limite beaucoup plus avantageuse : le moyen que nous allons employer est celui qui est utilisé d'habitude pour former le terme complémentaire de la formule de Taylor. Posons $s = Kh^5$, de sorte que l'on ait :

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) - \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_0+h)\right] + \frac{h^2}{12}\left[f'(x_0+h) - f'(x_0)\right] - Kh^5 = 0,$$

et considérons la fonction suivante de t :

$$F(t) = \varphi(x_0+t) - \varphi(x_0) - \frac{t}{2}\left[f(x_0) + f(x_0+t)\right] + \frac{t^2}{12}\left[f'(x_0+t) - f'(x_0)\right] - Kt^5.$$

Cette fonction s'annule pour $t = o$ et pour $t = h$; donc sa dérivée $F'(t)$ s'annule pour une certaine valeur $0 < \alpha < h$,

d'après le théorème des accroissements finis. Mais, en calculant cette dérivée, on constate qu'elle s'annule aussi pour $t = 0$.

La fonction $F'(t)$ s'annulant pour $t = 0$ et pour $t = \alpha$, on peut la traiter de la même façon, et ainsi de suite.

On arrive ainsi à cette conclusion que la dérivée troisième de $F(t)$ doit s'annuler pour une certaine valeur : $t = \theta h$ (avec $0 < \theta < 1$). Or cette dérivée est

$$F'''(t) = \frac{t^2}{12} f^{IV}(x_0 + t) - 60\, t^2\, K.$$

Par suite, $$K = \frac{1}{720} f^{IV}(x_0 + \theta h)$$

et l'on peut écrire : $s = \dfrac{h^5}{720} f^{IV}(x_0 + \theta h)$.

Si l'on désigne encore par M une borne supérieure de $\left| f^{IV}(x) \right|$ dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$, on aura donc :

$$|s| \leqslant \frac{Mh^5}{720}.$$

Le raisonnement se poursuit comme au paragraphe précédent : pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$, on découpe l'aire en n bandes de largeur égale à $h = \dfrac{b-a}{n}$; les abscisses sont respectivement

$$a,\ a + h,\ a + 2h,\ \ldots,\ a + (p-1)h,\ a + ph,\ \ldots,\ a + nh.$$

La valeur approchée de l'aire de la $p^{\text{ième}}$ bande est fournie par la formule (42) :

$$S_p = \frac{h}{2}\left[f[a + (p-1)h] + f(a + ph) \right] - \frac{h^2}{12}\left[f'(a + ph) - f'[a + (p-1)h] \right] ;$$

en ajoutant toutes ces expressions, on a l'aire approchée totale ; beaucoup de termes disparaissent et il reste :

$$I = h\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(a+h) + \ldots + f[a + (n-1)h] \right] - \frac{h^2}{12}\left[f'(b) - f'(a) \right]. \tag{43}$$

La limite supérieure de l'erreur systématique totale s'obtient comme précédemment ; en appelant M une borne supérieure de $|f^{IV}(x)|$ dans *tout* l'intervalle (a, b), on a :

$$(44) \qquad e_s < n\,\frac{Mh^5}{720} = \frac{Mh^4\,(b-a)}{720}.$$

Les formules (43) et (44) résolvent la question.

On voit que la formule (43) est beaucoup plus avantageuse que la formule (40) : elle donne une précision supérieure, pour une même valeur de h, et elle exige en outre moins de calculs d'ordonnées ; par contre, elle nécessite la connaissance de la dérivée en a et b.

Exemple III. — Soit à calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, avec une erreur absolue inférieure à 0,001.

Ici, on connaît la primitive, qui est *arc tgx* ; on a donc $I = \frac{\pi}{4}$; nous allons, à titre d'exercice de calcul, calculer cette intégrale par la méthode du paragraphe précédent, et ce sera un moyen de retrouver le nombre $\frac{\pi}{4}$.

On a :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},\ f^{IV}(x) = 24\,\frac{5x^4 - 10x^2 + 1}{(1+x^2)^5}.$$

Calculons d'abord une borne supérieure de $f^{IV}(x)$ en valeur absolue ; on peut étudier sans peine la variation du numérateur $5x^4 - 10x^2 + 1$ pour $0 \leq x \leq 1$; on constate que ce trinome bicarré décroît de 1 à -4 ; sa plus grande valeur absolue est donc 4. Le dénominateur $(1+x^2)^5$ est évidemment toujours supérieur à 1.

Donc on peut prendre $M = \frac{24 \times 4}{1}$.

Nous utiliserons la formule (43) ; nous aurons encore ici deux sortes d'erreurs :

1° Une *erreur systématique* provenant de ce que la formule (43) ne donne pas la valeur exacte de l'intégrale ; cette erreur a une limite supérieure donnée par l'expression (44).

2° Des *erreurs de calcul*, qui se produisent au cours du calcul des divers termes qui constituent la formule (43).

Le total de toutes ces erreurs doit rester inférieur à 0,001. Pour cela nous prendrons h assez petit pour que l'erreur systématique soit inférieure à la moitié environ de l'erreur totale, soit 0,0005. Ici, on a $b - a = 1$, donc $h = \frac{1}{n}$; il faut donc

$$\frac{Mh^4(b-a)}{720} = \frac{24 \times 4}{720\, n^4} = \frac{2}{15\, n^4} < \frac{1}{2000}.$$

En prenant $n = 4$ on a : $\frac{2}{15n^4} = \frac{1}{1920}$; cette quantité n'est pas inférieure à $\frac{1}{2000}$ mais elle en est très voisine et nous pouvons l'accepter.

Nous diviserons donc l'intervalle en 4 parties égales, soit $h = \frac{1}{4}$. La formule (43) donne alors :

$$I = \frac{1}{4}\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right] - \frac{1}{12 \times 16}\left[f'(1) - f'(0)\right].$$

Or,

$$f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f'(1) = -\frac{1}{2}, \quad f'(0) = 0,$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{17}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}, \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{16}{25}.$$

D'où :

$$I = \frac{1}{4}\left[0{,}75 + \frac{16}{17} + 0{,}8 + 0{,}64\right] + \frac{1}{384},$$

$$I = 0{,}1875 + \frac{4}{17} + 0{,}2 + 0{,}16 + \frac{1}{384}.$$

Nous aurons deux erreurs de calcul, visiblement ; faisons les divisions indiquées avec 4 décimales, en corrigeant la dernière, s'il y a lieu ; il vient :

$$\frac{4}{17} = 0{,}2353 \qquad \frac{1}{384} = 0{,}0026,$$

d'où $$I = 0{,}7854.$$

Le total des erreurs commises jusqu'à présent est inférieur à

$$\frac{1}{1920} + \frac{2}{20\,000} < \frac{1}{1000} ;$$

en supprimant la 4e décimale du résultat, nous ferions une nouvelle erreur, soit en tout :

$$\frac{1}{1920} + \frac{2}{20\,000} + \frac{4}{10\,000} = \frac{1}{1920} + \frac{1}{2000}.$$

Ce total est légèrement *supérieur* à $\frac{1}{1000}$: comme nous avons majoré constamment les erreurs, nous pouvons penser que le résultat $I = 0{,}785$ serait bien exact à $\frac{1}{1000}$ près, mais nous ne le démontrons pas ici rigoureusement; pour être *sûr* de rester dans les limites voulues, il faudrait donc garder les 4 décimales du résultat et écrire

$$I = 0{,}7854.$$

Donc

$$0{,}7844 < I = \frac{\pi}{4} < 0{,}7864.$$

Exemple IV. — Soit à calculer $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x^3}}$ avec une erreur absolue inférieure à 0,01.

Remarquons que nous pourrions ici appliquer la méthode du développement en série, car

$$(2+x^3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\frac{x^3}{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

la quantité $z = \frac{x^3}{2}$ reste ici comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$; donc on

peut appliquer le développement de $(1+z)^{-\frac{1}{2}}$ comme dans l'exemple I ci-dessus.

Nous allons utiliser la formule (43). Ici on a :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^3}}, \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}\,x^2\,(2+x^3)^{-3/2},$$

$$f^{IV}(x) = \frac{135\,x^2}{(2+x^3)^{9/2}}\left[\frac{7}{16}\,x^6 - 5\,x^3 + 4\right].$$

Les variations du trinome $\frac{7}{16}\,x^6 - 5x^3 + 4$ s'étudient aisément : quand x croît de 0 à 1, ce trinome décroît de 4 à $-\frac{9}{16}$; sa plus grande valeur absolue est donc 4 ; la plus grande valeur absolue de x^2 est 1, et la plus petite valeur absolue du dénominateur est $2^{9/2} = 16\sqrt{2}$. Donc on peut prendre

$$M = \frac{135 \times 4}{16\sqrt{2}} = \frac{135.\sqrt{2}}{8} < 25.$$

Nous garderons M = 25, moins avantageux mais plus simple.

On a encore : $b - a = 1$, $h = \frac{1}{n}$. Pour que l'erreur systématique soit inférieure à $\frac{1}{200}$ environ, il faut

$$\frac{M\,h^4\,(b-a)}{720} = \frac{25}{720\,n^4} < \frac{1}{200},$$

ce qui donne $n = 2$, et par suite $h = \frac{1}{2}$. L'erreur systématique aura alors pour limite supérieure

$$\frac{25}{720 \times 16} = \frac{5}{2304} < \frac{3}{1000},$$

et la formule (43) s'écrit ici :

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\right] + \frac{1}{48} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} ;$$

écrivons ceci de manière à ne garder aucun radical en dénominateur (ce qui simplifie les calculs et diminue habituellement les erreurs) :

$$I = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{34}}{17} + \frac{\sqrt{3}}{288}.$$

Les quatre quantités du second membre se calculent toutes de la même façon ; prenons par exemple $\frac{\sqrt{3}}{12}$; ce calcul comportera 2 erreurs :

L'une, systématique, provenant de ce que nous remplacerons $\sqrt{3}$ par une valeur approchée ;

l'autre, de calcul, provenant de ce que nous supprimerons des décimales dans la division par 12.

Les tables nous donnent (voir table I, à la fin du volume) :

$$\sqrt{3} = 1{,}732 \qquad \text{erreur} < \frac{1}{2000},$$

donc :

$$\frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{1{,}732}{12} \qquad \text{erreur} < \frac{1}{12 \times 2000} ;$$

en effectuant :

$$\frac{\sqrt{3}}{12} = 0{,}144 \qquad \text{erreur} < \frac{1}{12 \times 2000} + \frac{1}{2000}.$$

On obtient de même :

$$\frac{\sqrt{2}}{8} = 0{,}177 \qquad \text{erreur} < \frac{1}{8 \times 2000} + \frac{1}{2000},$$

$$\frac{\sqrt{34}}{17} = 0{,}343 \qquad \text{erreur} < \frac{1}{17 \times 2000} + 0,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{288} = 0{,}006 \qquad \text{erreur} < \frac{1}{288 \times 2000} + \frac{1}{2000}.$$

En résumé, nous trouvons :

$$I = 0{,}670.$$

Récapitulons les erreurs : nous n'avons qu'à ajouter toutes les erreurs ci-dessus, y compris la première erreur systématique évaluée à $\frac{3}{1000}$; il vient :

$$\frac{3}{1000} + \frac{1}{12 \times 2000} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{8 \times 2000} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{17 \times 2000} + \frac{1}{288 \times 2000} + \frac{1}{2000} =$$

$$\frac{1}{2000}\left[9 + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{17} + \frac{1}{288}\right] < \frac{10}{2000} = \frac{1}{200}.$$

Nous pouvons ici, sans commettre d'erreur, supprimer la 3e décimale du résultat et écrire

$$I = 0{,}67 \quad \text{à } \frac{1}{200} \text{ près.}$$

42. Intégration graphique. — On peut obtenir une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_a^b f(x)\,dx$, en se servant uniquement du tracé de la courbe $y = f(x)$.

Remarquons tout d'abord que le tracé d'une courbe dont on connaît l'équation exige le calcul d'un grand nombre d'ordonnées : dans ce cas il est donc plus simple d'appliquer les formules indiquées aux paragraphes précédents. Mais il arrive que l'on possède le tracé de la courbe et souvent même sans connaître son équation : par exemple lorsque la courbe est obtenue par un appareil enregistreur. C'est dans ces cas qu'on utilisera les constructions dont nous allons parler.

Il s'agit en somme d'évaluer l'aire S comprise entre l'axe Ox et l'arc de courbe $y = f(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$. Il y a pour cela beaucoup de moyens : nous nous bornerons à en indiquer deux.

Premier moyen. — Si la courbe est tracée sur du papier quadrillé (carrés de 1 mm. de côté), il n'y a qu'à compter les carrés qui recouvrent l'aire en question. Quelques-uns de ces carrés sont traversés par le contour ; si l'on ne compte que les carrés entièrement intérieurs à S, on aura une valeur approchée par défaut.

Si l'on compte non seulement les carrés intérieurs, mais encore ceux qui sont traversés par le contour, on aura une valeur approchée par excès.

Cette méthode, qu'on peut perfectionner dans chaque cas particulier, est en général *excellente* ; on peut l'appliquer même si la courbe n'est pas tracée sur du papier quadrillé : il n'y a qu'à lui superposer un papier

quadrillé transparent, qui se trouve facilement dans le commerce.

Deuxième moyen. — On peut faire graphiquement les calculs qui sont exigés par la formule (43).

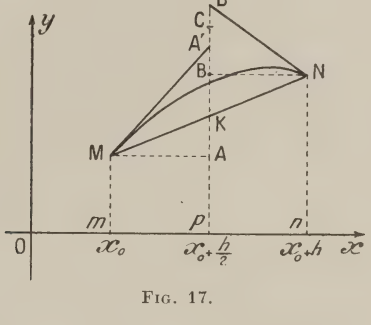

Fig. 17.

Prenons en effet un petit arc de courbe MN (voir fig. 17) ; on a vu qu'on pouvait prendre, comme valeur approchée de l'aire, l'expression donnée par la formule (42) :

$$S = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_0 + h)\right] - \frac{h^2}{12}\left[f'(x_0 + h) - f'(x_0)\right].$$

Soit p le milieu de mn ; on voit sur la figure que

$$2\,\overline{pK} = f(x_0) + f(x_0 + h),$$

$$\overline{AA'} = \overline{MA} \times tg\,\widehat{AMA'} = \frac{h}{2} f'(x_0),$$

$$\overline{BB'} = \overline{BN} \times tg\,\widehat{BNB'} = -\frac{h}{2} f'(x_0 + h),$$

par suite,

$$\frac{S}{h} = \overline{pK} + \frac{1}{6}\left[\overline{AA'} + \overline{BB'}\right].$$

Mais $\overline{AA'} = \overline{AK} + \overline{KA'}$ et $\overline{BB'} = \overline{BK} + \overline{KB'}$,

et comme $\overline{AK} + \overline{BK} = 0$,

on a : $$\frac{S}{h} = \overline{pK} + \frac{1}{6}\left[\overline{KA'} + \overline{KB'}\right].$$

Soit C le milieu de A'B' ; on peut écrire :

$$\frac{S}{h} = \overline{pK} + \frac{1}{3}\overline{KC}; \tag{45}$$

cette expression se mesure facilement sur la figure : elle évite donc le calcul de la formule (42).

On sait que cette formule est d'autant plus exacte que h est plus petit ; c'est pourquoi, pour calculer $\int_a^b f(x)\ dx$, on divisera l'intervalle (a, b) en un certain nombre d'intervalles partiels (il n'est pas nécessaire qu'ils soient égaux), et pour chacun d'eux on calculera l'aire correspondante au moyen des constructions ci-dessus.

Dans la pratique cette méthode est très précise : elle est en tout cas du même ordre de précision que la construction même de la courbe.

43. Construction de la courbe intégrale. — Considérons la limite supérieure de l'intégrale comme variable, soit : $I = \int_a^x f(x)\ dx$; la valeur de I dépend alors de celle de x : c'est l'aire limitée par l'axe Ox et l'arc de courbe compris entre les ordonnées a et x. Posons donc $I = F(x)$ et proposons-nous de trouver la courbe $y = F(x)$.

Nous déterminerons cette courbe par points, et par rapport aux mêmes axes que $y = f(x)$.

Pour cela, nous prendrons sur Ox les points d'abscisses : $a + h$, $a + 2h$, $a + 3h$, etc.

On a évidemment : $F(a) = \int_a^a f(x)\ dx = 0$; donc la courbe intégrale part du point a sur Ox. Cherchons le point N_1, d'abscisse $a + h$. L'ordonnée de ce point doit être égale à la surface S comprise entre l'arc AM_1

et Ox ; nous avons vu au paragraphe précédent (deuxième moyen, formule 45), un procédé graphique pour obtenir la valeur du rapport $\frac{S}{h}$; or on a :

$$\frac{S}{h} = \frac{m_1 N_1}{h} = \operatorname{tg} \widehat{m_1 a N_1} ;$$

donc cette tangente est connue ; on sait construire l'angle, ce qui donnera la direction de la droite aN_1 et par suite, le point N_1. L'ordonnée $\overline{m_2 N_2}$ s'obtiendra en ajoutant à la précédente la quantité $\overline{n_1 N_2}$, égale à l'aire

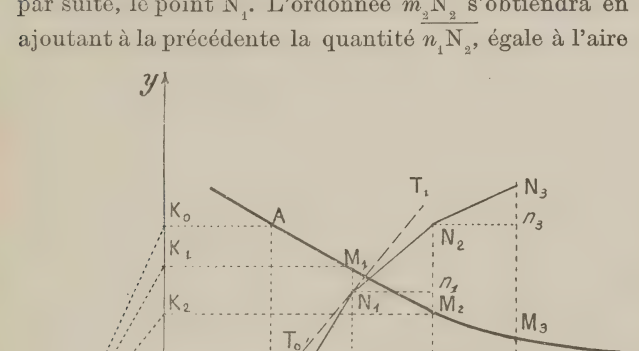

Fig. 18.

comprise entre l'arc M_1M_2 et Ox ; en opérant comme précédemment, les constructions feront connaître $\operatorname{tg} \widehat{n_1 N_1 N_2}$, par suite la direction du côté N_1N_2, et par conséquent le point N_2. On continue toujours de même.

La courbe intégrale cherchée passe donc par $aN_1N_2N_3$... Il est très facile d'avoir les tangentes à cette courbe en ces points ; on sait en effet que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$; donc $F'(x) = f(x)$.

Prenons sur Ox le point P d'abscisse (— 1) ; on a visiblement :

$$\operatorname{tg} \widehat{\mathrm{OP\,K_0}} = \overline{\mathrm{OK_0}} = \overline{aA} = f(a) = F'(a) ;$$

donc la tangente en a à la courbe intégrale est parallèle à PK_0 ; on voit exactement de même que la tangente en N_1 est parallèle à PK_1, et ainsi de suite.

Ces constructions suffisent pour dessiner la courbe intégrale avec quelque précision (1).

44. Equations différentielles. — Nous nous bornerons ici aux équations du premier ordre, de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{46}$$

Rappelons qu'on appelle courbe intégrale une courbe telle, qu'en chacun de ses points, il existe entre les coordonnées du point et la pente de la tangente en ce point la relation (46). Il existe une infinité de courbes intégrales, il n'y en a qu'une qui passe par un point donné du plan (x_0, y_0).

Nous nous proposons de construire graphiquement cette courbe, connaissant le point (x_0, y_0) ; le problème résolu au paragraphe précédent est un cas particulier de celui-ci, la fonction du second membre ne dépendant pas de y.

Considérons une courbe I d'équation $f(x, y) = k$ (k constante quelconque) ; par chacun de ses points il passe une courbe intégrale, et la tangente à celle-ci en ce point a pour pente k, par définition. C'est pour cette raison que les courbes I sont dites *isoclines* ; il est bien évident d'ailleurs que les isoclines ne sont pas des intégrales.

(1) Il existe des procédés pour perfectionner ce tracé en déterminant les cercles de courbure en a, N_1, N_2, etc,

Nous commencerons par construire une série de courbes isoclines, en prenant par exemple :
$k = 1, 2, 3,...$ etc., puis $k = -1, -2, -3...$ etc.
On peut prendre des valeurs plus rapprochées, et plus ces valeurs de k seront voisines les unes des autres, plus grande sera la précision du résultat.

Cela posé, soit A le point de coordonnées (x_0, y_0) ; la tangente en ce point à l'intégrale qui y passe a pour pente $f(x_0, y_0)$; cette pente est donc connue et on peut tracer la tangente AT_0 (fig. 19).

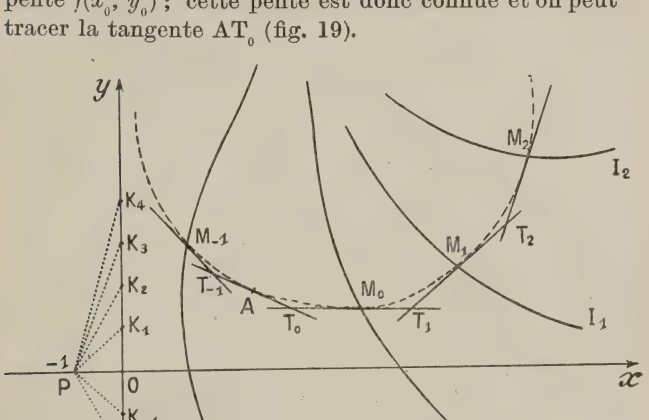

Fig. 19.

La courbe cherchée coupera l'isocline la plus voisine à droite, qui est ici I_0, en un point M_0 et la tangente en ce point aura pour pente 0, c'est-à-dire sera parallèle à Ox : nous déterminerons ce point *au jugé*, de manière que le point de rencontre T_0 des tangentes soit à peu près équidistant de A et de M_0.

Cherchons maintenant le point M_1 où la courbe rencontre l'isocline I_1 ; en ce point la tangente aura pour pente 1 ; elle sera donc parallèle à la droite PK_1 qui joint le point P d'abscisse — 1 sur Ox, au point K_1 d'abscisse + 1 sur Oy ; on détermine M_1 *au jugé*, de manière que le point de rencontre des tangentes T_1 soit à peu près équidistant de M_0 et M_1 (cela se fait très rapidement en faisant glisser le long d'une règle une équerre dont le bord est disposé parallèlement à PK_1).

On détermine de même M_2, M_3, etc., ainsi que les points à gauche de A : M_{-1}, M_{-2}, etc.

Les pentes correspondant aux isoclines s'obtiennent, comme on l'a remarqué plusieurs fois, en joignant le point P aux points d'ordonnée 1, 2, 3, etc., puis — 1, — 2, etc., sur Oy. On dessine la courbe intégrale d'après les points et les tangentes connus (en pointillé sur la figure) (1).

45. Appareils mécaniques. — Rappelons ici, pour mémoire, qu'il existe des appareils mécaniques qui permettent de faire des intégrations ; ils se distinguent en *planimètres*, qui donnent la valeur de l'aire limitée par un contour fermé (le plus connu est le planimètre d'Amsler) et en *intégraphes* qui permettent de décrire mécaniquement la courbe intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$, du paragraphe 43, figure 18 (2).

L'emploi de ces appareils exige la construction préalable de la courbe à intégrer : ils ne peuvent donc pas donner le résultat avec une précision supérieure à celle des méthodes graphiques, et le plus souvent elle leur est même inférieure : par contre les appareils mécaniques donnent le résultat avec une grande rapidité.

(1) Cette construction est évidemment grossière ; on peut la perfectionner en la considérant comme une première approximation : Voir par exemple : C. Runge, *Graphical Methods*, Columbia University Press, 1912.

(2) On trouvera une description et une théorie de ces appareils dans le livre de M. Jacob : *Le Calcul mécanique* (Paris, Doin, 1911).

Chapitre VI

INTÉGRALES ELLIPTIQUES

---

46. Formes de Legendre. — On désigne sous le nom d'*intégrales elliptiques* toutes les intégrales de la forme

$$\int f(x, X)\, dx, \tag{47}$$

où f est une fonction rationnelle de x et de X, et dans laquelle il est sous-entendu que l'on a :

$$X = \sqrt{P(x)},$$

P étant un polynome de degré 3 ou 4 (1).

Ces intégrales *ne peuvent pas* s'exprimer au moyen des fonctions élémentaires connues (rationnelles, irrationnelles, circulaires, exponentielles, logarithmiques, etc.). Il faut donc les étudier séparément ; il n'y a là rien d'étonnant : c'est ainsi par exemple qu'on ne saurait pas intégrer $\int \frac{dx}{x}$, si l'on n'avait auparavant étudié une fonction spéciale, qui est Log x.

Il en est de même ici et l'étude des fonctions nouvelles

(1) On peut ajouter que ce polynome doit avoir ses racines distinctes, car si le polynome P admettait une racine double, c'est-à-dire était divisible par un facteur de la forme $(x-a)^2$, on pourrait évidemment faire sortir ce facteur du radical, et il ne resterait sous le radical qu'un polynome du *second* degré ; l'intégrale ne serait plus elliptique et se calculerait par des moyens connus.

qui permettent d'exprimer les intégrales de la forme (47) font l'objet de la théorie des fonctions elliptiques.

Nous n'avons pas ici, bien entendu, l'intention d'exposer cette théorie, mais au contraire d'apprendre à s'en passer pour les cas les plus simples qui se rencontrent fréquemment dans la pratique.

On démontre que les intégrales (47) peuvent toujours se ramener aux trois suivantes :

$$(48)\quad I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad I_2 = \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

k étant une constante positive inférieure à 1.

Legendre leur a donné le nom d'*intégrales elliptiques de première, seconde* et *troisième espèce*, respectivement.

Nous montrerons, au paragraphe suivant, comment on ramène l'intégrale à ces formes simples, dans quelques cas particuliers les plus fréquents (1).

Nous allons tout d'abord montrer comment on calcule les intégrales fondamentales données par les formules (48), en nous bornant d'ailleurs à I_1 et I_2.

47. Calcul des intégrales de première et de seconde espèce. — Nous ferons d'abord le changement de variable $x = \sin\varphi$, ce qui donne :

$$I_1 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad I_2 = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Dans les applications, ces expressions ne se rencontreront que sous forme d'intégrale définie ; en transfor-

(1) Voir pour la réduction, dans le cas général, de l'intégrale (47) aux trois formes fondamentales, le *Cours d'analyse* de Jordan, t. II, 3e éd., p. 31 et suiv. ; ou bien l'un quelconque des nombreux ouvrages consacrés aux fonctions elliptiques, par exemple celui de MM. Appell et Lacour (Paris, Gauthier-Villars, 1897).

mant les limites suivant la nouvelle variable, on aura donc :

$$I_1 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad I_2 = \int_{\theta_1}^{\theta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\ d\varphi.$$

On sait d'ailleurs que

$$\int_{\theta_0}^{\theta} f(\varphi)\ d\varphi = \int_{0}^{\theta} f(\varphi)\ d\varphi - \int_{0}^{\theta_0} f(\varphi)\ d\varphi.$$

Il suffit donc de savoir calculer les intégrales

$$(49) \qquad I_1 = \int_{0}^{\theta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad I_2 = \int_{0}^{\theta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\ d\varphi.$$

Il est bien certain qu'on pourrait calculer ces intégrales soit par les méthodes de calcul approché, soit par les méthodes graphiques exposées au chapitre V ; il serait même souvent inutile alors de faire les diverses transformations que nous venons d'indiquer et on pourrait utiliser les formes (48), ou même conserver parfois la forme primitive (47) si elle n'est pas trop compliquée. Mais on a vu que l'emploi de ces méthodes est long, et les intégrales dont il s'agit interviennent assez fréquemment pour qu'on se soit donné la peine de les calculer une fois pour toutes, sous forme de *tables*. C'est à ces tables qu'on se réfèrera, pour obtenir les intégrales (49) : nous allons en indiquer la disposition.

48. Tables de Legendre. — Dans les expressions (49),
k s'appelle le module de l'intégrale,
θ s'appelle l'amplitude de l'intégrale.
k étant inférieur à 1, on pose $k = \sin \alpha$, et on a :

$$(50) \quad I_1 = \int_{0}^{\theta} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}}, \quad I_2 = \int_{0}^{\theta} \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}\ d\varphi.$$

Il est clair que la valeur de chacune de ces intégrales est déterminée dès qu'on connaît α et θ ; les tables

donnant I_1 et I_2 seront donc des tables à double entrée (comme la table de multiplication de Pythagore).

Les tables de Legendre donnent les valeurs de I_1 et I_2, calculées pour *chaque degré* de l'amplitude θ et de l'angle du module α (avec 9 ou 10 décimales) ; on trouvera des tables abrégées dans divers ouvrages spéciaux (1). L'interpolation de ces tables, nécessaire lorsque θ et α ne sont pas égaux à un nombre exact de degrés, est délicate ; il faut se reporter aux formules données à cet effet dans les ouvrages en question.

49. Intégrales complètes. — On dit que l'intégrale est complète lorsque l'amplitude $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou 90°. Ces intégrales ont donc la forme

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}}, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}\, d\varphi;$$

leur valeur ne dépend plus que de celle de α et on peut la donner par des tables à simple entrée. On trouvera ces tables à la fin de ce volume (table X, p. 200) ; leur disposition et leur usage sont évidents ; si la valeur de α que l'on a à considérer n'était pas égale à un nombre exact de degrés, on interpolerait par parties proportionnelles, comme dans les exemples ci-dessous (2).

Exemple I. — Longueur d'un arc d'ellipse.

On sait que les équations de l'ellipse peuvent se mettre sous la forme paramétrique suivante :

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b \cos\varphi,$$

(1) En particulier dans le *Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques*, de M. L. Lévy (Paris, Gauthier-Villars, 1898).

(2) Ces tables sont abrégées ; l'interpolation par parties proportionnelles entraîne une erreur qui peut affecter les *deux* dernières décimales lorsque $\alpha > 60°$.

d'où $dx = a\cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = -b\sin\varphi\, d\varphi,$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\, d\varphi^2,$$

$$ds^2 = a^2(1 - e^2\sin^2\varphi)\, d\varphi^2, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}.$$

Si l'on veut avoir la longueur de l'arc compris entre le point $\varphi = 0$, c'est-à-dire le sommet sur Oy positif, et le point quelconque $\varphi = \theta$, on aura à calculer

$$l = a\int_0^{\theta} \sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

qui est une intégrale elliptique de 2e espèce, de module égal à l'excentricité de l'ellipse.

Cherchons la longueur d'un quart d'ellipse, en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$, et supposons pour fixer les idées $a = 3$ et $b = 2$.

On a :

$$l = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{5}{9}\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

C'est une intégrale complète que nous pouvons calculer avec nos tables. On a ici : $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0{,}74537$ (table I).

Si on se reporte à la table des sinus et cosinus, on voit :

$$0{,}74\,703 = \cos 41^\circ 40' = \sin 48^\circ 20',$$
$$0{,}74\,509 = \cos 41^\circ 50' = \sin 48^\circ 10' ;$$

la différence de ces deux sinus est 0,00194 ; elle correspond à une différence de 10′ ; par conséquent α sera égal à 48°10′, plus un nombre de minutes égal à $\frac{37 - 9}{194} \times 10 = 1',44$.

Il n'y a pas intérêt à transformer ici les fractions de minutes en secondes. Donc on prendra :

$$\alpha = 48^\circ\, 11',44.$$

La table des intégrales complètes elliptiques (voir table X, colonne I_2) donne :

$$\alpha = 48^\circ, \quad I_2 = 1{,}32\,38,$$
$$\alpha = 49^\circ, \quad I_2 = 1{,}31\,47.$$

Une augmentation de 60′ correspond à une diminution de 0,0091 pour l'intégrale ; une augmentation de 11′44 correspondra donc à une diminution de

$$0{,}0091 \times \frac{11{,}44}{60} = 0{,}0017.$$

Donc, ici

$$I_2 = 1{,}3238 - 0{,}0017 = 1{,}3221,$$

et par suite,

$$l = 3 \times 1{,}3221 = 3{,}9663.$$

Exemple II. — Pendule simple.

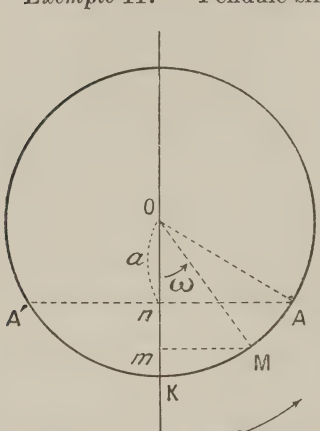

FIG. 20.

Soit l la longueur du pendule ; ω l'angle qui définit sa position à l'instant t, compté positivement dans le sens de la flèche ; g l'accélération de la pesanteur (fig. 20).

Le théorème des forces vives donne immédiatement :

$$\left(l\,\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = 2g(l\cos\omega - a),$$

a étant la constante des forces vives. Nous supposerons $-l < a < +l$, sans quoi le point M effectuerait dans son mouvement une rotation complète autour de 0.

L'équation ci-dessus montre alors immédiatement qu'on doit avoir : $l\cos\omega - a > 0$, c'est-à-dire, sur la figure $\overline{om} > \overline{on}$; donc le point M va osciller entre A et A'. On peut écrire :

$$l\cos\omega - a = l\left(1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2}\right) - a = 2l\left[\frac{l-a}{2l} - \sin^2\frac{\omega}{2}\right];$$

puisque $l > a$, posons $\dfrac{l-a}{2l} = k^2$ et faisons le changement de variable :

$$\sin\frac{\omega}{2} = ku, \text{ d'où } \cos\frac{\omega}{2}\,d\omega = 2k\,du;$$

l'équation différentielle s'écrit alors :

$$l^2\,\frac{4k^2\,du^2}{(1-k^2u^2)\,dt^2} = 4\,lg\,k^2\,(1-u^2),$$

d'où $$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}}.$$

Cherchons par exemple la durée d'une demi-oscillation simple, c'est-à-dire le temps que met le point M pour aller de K en A. Dans ces conditions,

$$l\cos\omega \quad \text{varie de} \quad l \text{ à } a,$$

$$\cos\omega \quad \text{»} \quad 1 \text{ à } \frac{a}{l},$$

$$\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{1-\cos\omega}{2} \quad \text{»} \quad 0 \text{ à } \frac{l-a}{2l} = k^2,$$

$$u = \frac{1}{k}\sin\frac{\omega}{2} \quad \text{»} \quad 0 \text{ à } 1,$$

et par suite, en appelant T la durée de l'oscillation :

$$\frac{1}{2}\mathrm{T} = \sqrt{\frac{l}{g}}\ \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}};$$

c'est une intégrale elliptique de première espèce; on la calcule en posant $u = \sin\varphi$, ce qui donne :

$$\mathrm{T} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

On a ainsi une intégrale complète qui sera donnée par les tables, et T s'obtiendra sans difficulté, connaissant l, g et a ; cette dernière constante est donnée, comme on sait, par la vitesse initiale.

50. Réduction d'une intégrale elliptique aux formes de Legendre. — Nous allons prendre comme type l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{P}(x)}};$$

dans les autres cas il faut opérer de la même façon, mais en préparant tout d'abord le calcul par des transformations algébriques (1).

Supposons d'abord que $\mathrm{P}(x)$ *soit du* 4e *degré.* On démontre alors (1) que ce polynome peut être ramené à la

(1) Voir à ce sujet les ouvrages indiqués dans la note de la p. 128.

forme bicarrée suivante, où les coefficients a, b, a', b', sont réels :

$$P(x) = (ax^2 + b)\ (a'x^2 + b').$$

On posera, suivant les cas, d'après les signes de aa', $\frac{b}{a}$, $\frac{b'}{a'}$:

$$a\,a' = \pm\gamma^2, \quad \frac{b}{a} = \pm\alpha^2, \quad \frac{b'}{a'} = \pm\beta^2,$$

et on aura par conséquent :

$$\sqrt{P(x)} = \gamma\ \sqrt{\pm\,(x^2 \pm \alpha^2)\ (x^2 \pm \beta^2)}.$$

Nous avons donc 8 cas à distinguer, en combinant les divers signes de toutes les manières possibles.

Nous pouvons toujours choisir les notations de manière que $\alpha^2 \leq \beta^2$; cela revient à appeler α^2 le plus petit, en valeur absolue, des deux nombres $\frac{b}{a}$ et $\frac{b'}{a'}$.

Nous nous bornerons à étudier les cas où l'intégrale est réelle, c'est-à-dire où l'expression sous le radical est positive, les autres étant sans intérêt dans la pratique.

1er cas.— $\sqrt{P(x)} = \gamma\sqrt{(x^2 + \alpha^2)\ (x^2 + \beta^2)}$; posons $x = \alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi$,

d'où $dx = \dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\sqrt{P(x)} = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2}\sin^2\varphi}$.

En posant $k^2 = \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2}$, on aura $0 \leq k^2 \leq 1$, et l'intégrale s'écrit :

$$I = \frac{1}{\beta\gamma}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

On obtient ainsi la forme réduite de première espèce.

2e cas. — $\sqrt{P(x)} = \gamma\sqrt{-(x^2 + \alpha^2)\ (x^2 + \beta^2)}$; l'intégrale est ici manifestement imaginaire.

3e cas. — $\sqrt{P(x)} = \gamma\sqrt{(x^2 - \alpha^2)\ (x^2 + \beta^2)}$.

L'expression sous le radical ne sera positive que si $x^2 > \alpha^2$. Posons donc $x^2 = \alpha^2 + y^2$; il vient :

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{y\,dy}{\gamma x \sqrt{y^2(\alpha^2+\beta^2+y^2)}} = \frac{dy}{\gamma\sqrt{(y^2+\alpha^2)(y^2+\alpha^2+\beta^2)}} ;$$

on est donc exactement ramené à la forme du 1er cas. On terminera en posant, comme il a été dit, $y = \alpha \operatorname{tg}\varphi$, et il vient :

$$I = \frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

4e cas. — $\sqrt{P(x)} = \gamma\sqrt{-(x^2-\alpha^2)(x^2+\beta^2)}$.

L'intégrale n'est réelle que si $x^2 < \alpha^2$. Posons alors

$$x = \alpha\cos\varphi,$$

d'où

$dx = -\alpha\sin\varphi\,d\varphi$, $\sqrt{P(x)} = \alpha\gamma\sin\varphi\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2\sin^2\varphi}$;

en posant $k^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}$, on aura $0 < k^2 < 1$, et l'intégrale s'écrit :

$$I = -\frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

5e cas. — $\sqrt{P(x)} = \gamma\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2-\beta^2)}$.

Ce cas ne diffère pas en réalité du troisième : les rôles des quantités α et β sont échangés. On posera

$$x^2 = \beta^2 + y^2, \quad \text{puis } y = \beta\operatorname{tg}\varphi,$$

et on aura :

$$I = \frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

6e cas. — $\sqrt{P(x)} = \gamma\sqrt{-(x^2+\alpha^2)(x^2-\beta^2)}$.

Ce cas ne diffère pas du quatrième : les rôles de α et β sont simplement échangés. On posera $x = \beta\cos\varphi$ et on aura :

$$I = -\frac{1}{\gamma\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

7e cas. — $\sqrt{P(x)} = \gamma\sqrt{(x^2-\alpha^2)\ (x^2-\beta^2)}$.

L'intégrale n'est réelle que si $x^2 < \alpha^2$, ou $x^2 > \beta^2$.

Il faudra donc tout d'abord examiner les limites d'intégration ; si entre ces limites on a $x^2 < \alpha^2$, on pose $x = \alpha \sin\varphi$ et l'intégrale devient :

$$I = \frac{1}{\beta\gamma}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

Si, entre les limites d'intégration, on a $x^2 > \beta^2$, on pose $x = \dfrac{\beta}{\sin\varphi}$ et l'intégrale devient :

$$I = -\frac{1}{\beta\gamma}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

8e cas. — $\sqrt{P(x)} = \gamma\sqrt{-(x^2-\alpha^2)\ (x^2-\beta^2)}$.

L'intégrale n'est alors réelle que si $\alpha^2 < x^2 < \beta^2$.

On pose alors

$$x^2 = \alpha^2\sin^2\varphi + \beta^2\cos^2\varphi,$$

et il vient :

$$I = -\frac{1}{\beta\gamma}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad k^2 = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2}.$$

Exemple I. — Soit à calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

On a ici $1-x^4 = (1-x^2)\ (1+x^2)$.

On est dans le 4e cas, avec $\alpha^2 = \beta^2 = 1$; on posera donc $x = \cos\varphi$, $k^2 = \dfrac{1}{2}$ et on aura :

$$I = +\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} ;$$

c'est une intégrale complète ; on a ici $\alpha = 45°$ (1), la table X nous donne :

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1{,}8541 = 1{,}3110.$$

(1) Nous désignons par α l'angle du module, c'est-à-dire l'angle qui a k pour sinus.

Exemple II. — Soit à calculer $I = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Cette intégrale n'a pas exactement la forme de celles que nous avons étudiées ; mais, ainsi que nous l'avons dit, nous ferons les mêmes transformations.

Posons donc encore $x = \cos\varphi$ et $k^2 = \frac{1}{2}$; il vient :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\ d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Mais on a l'identité :

$$\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k^2}\,\frac{(k^2-1)+(1-k^2\sin^2\varphi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

d'où,

$$I = \frac{k^2-1}{\sqrt{2}\,k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{1}{\sqrt{2}\,k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi ;$$

le calcul est ramené à celui de deux intégrales, de première et de deuxième espèce, qui est immédiat au moyen des tables.

Exemple III. — Soit à calculer $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

Ici le polynome sous le radical n'est pas mis sous forme d'un produit de 2 facteurs à coefficients réels ; on le ramènera à cette forme en posant

$$x = \frac{1-t}{1+t}, \quad \text{d'où} \quad dx = -\frac{2\,dt}{(1+t)^2} ;$$

on a :

$$x^4+1 = \frac{2}{(1+t)^4}(t^4+6t^2+1),$$

d'où :

$$I = -\sqrt{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^4+6t^2+1}}.$$

Or $t^4+6t^2+1 = [t^2+(3-\sqrt{8})]\,[t^2+(3+\sqrt{8})]$.

Nous sommes ramenés au premier cas, en posant

$$\alpha^2 = 3-\sqrt{8}, \quad \beta^2 = 3+\sqrt{8}, \quad \gamma = 1.$$

Donc on aura : $t = \alpha \operatorname{tg} \varphi$,

$$I = \frac{-\sqrt{2}}{\beta} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad k^2 = \frac{2\sqrt{8}}{3 + \sqrt{8}}.$$

Si $P(x)$ est du troisième degré, on peut ramener ce cas au précédent en posant

$$x = \frac{1}{y}, \quad dx = -\frac{dy}{y^2}.$$

Alors le polynome

$$P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

devient :

$$P\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^3}\left[A + By + Cy^2 + Dy^3\right].$$

D'où :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4}},$$

et cette nouvelle intégrale se traite comme dans le cas général. Mais cette transformation n'est pas toujours nécessaire, et dans les cas simples on peut faire directement le changement de variable qui ramène aux formes de Legendre.

Exemple IV.— Soit à calculer $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+h^2x)}}$.

Cette intégrale n'est réelle que si $x < -\frac{1}{h^2}$, ou bien $0 < x < 1$; plaçons-nous dans ce dernier cas : nous pouvons alors poser

$$x = \cos^2\varphi, \quad \text{d'où} \quad dx = -2 \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi$$

et on a :

$$I = -\frac{2}{\sqrt{1 + h^2}} I_1 \quad \text{avec } k^2 = \frac{h^2}{1 + h^2}.$$

En particulier, si $h = 1$, on a :

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x - x^3}} = -\sqrt{2}\, I_1, \quad k^2 = \frac{1}{2}.$$

Exemple V. — Prenons maintenant

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x\ (1-x)\ (1-h^2x)}}.$$

Quand $h^2 < 1$, cette intégrale n'est réelle que si x est supérieur à $\frac{1}{h^2}$, ou compris entre 0 et 1. Plaçons-nous dans ce dernier cas ; nous pouvons alors poser

$$x = \sin^2\varphi, \quad \text{d'où} \quad dx = 2\sin\varphi\ \cos\varphi\ d\varphi,$$

et on a :

$$I = 2\ I_1 \qquad \text{avec } k^2 = h^2.$$

Exemple VI. — Longueur d'un arc d'hyperbole.

L'équation de l'hyperbole : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, peut s'écrire sous forme paramétrique :

$$x = \frac{a}{\sin t}, \quad y = b\ \operatorname{cotg} t.$$

On a ainsi :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = (a^2\cos^2 t + b^2)\ \frac{dt^2}{\sin^4 t}.$$

Calculons la longueur de l'arc compris entre un sommet ($t = \frac{\pi}{2}$, $x = a$, $y = 0$, par exemple) et un point de la branche correspondante, de paramètre $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. On a :

$$l = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2}\ \frac{dt}{\sin^2 t}$$

Une intégration par parties donne :

$$\int \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2}\ \frac{dt}{\sin^2 t}$$

$$= -\operatorname{cotg} t\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2} - \int \frac{a^2\cos^2 t\ dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2}}.$$

Or,

$$\frac{a^2\cos^2 t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2}} = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2} - \frac{b^2}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2}};$$

enfin remarquons que l'on peut écrire :

$$\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2} = \frac{a}{k}\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}, \quad k^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2},$$

et on a ainsi :

$$= -\operatorname{cotg}\theta\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2} - \frac{a}{k}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt$$

$$+ \frac{b^2 k}{a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}}.$$

Les deux intégrales qui figurent dans cette expression se calculent immédiatement au moyen des intégrales de deuxième et de première espèce, respectivement :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt = \int_{0}^{\theta}\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt$$

$$- \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}\,dt,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}} = \int_{0}^{\theta}\frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}}$$

$$- \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}}.$$

Ces quatre intégrales se calculent donc au moyen des tables.

Chapitre VII

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES OU TRANSCENDANTES

I. — *ÉQUATIONS LINÉAIRES*

On sait résoudre par le calcul les systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues, soit par la méthode de substitution (en tirant une inconnue d'une équation et portant sa valeur dans les autres), soit par la méthode beaucoup plus rapide et commode des déterminants (formules de Kramer) ; ces opérations se font sans autres erreurs que des erreurs de calcul qu'il est très facile d'évaluer dans chaque cas : aussi n'avons-nous rien de plus à ajouter sur ce sujet.

Nous nous bornerons ici à exposer une *méthode graphique* pour résoudre ces systèmes d'équations.

51. Elimination graphique d'une inconnue entre deux équations linéaires. — Considérons tout d'abord deux axes parallèles $O_1 x_1$, $O_2 x_2$ et de même sens sur lesquels on a choisi comme origines des abscisses O_1 et O_2 ; il est commode de prendre ces points de façon que la droite $O_1 O_2$ soit perpendiculaire à la direction des axes, mais cela n'est pas nécessaire et il n'y aurait rien à changer à ce qui suit si $O_1 O_2$ était oblique. Nous choisi-

rons également un sens positif sur $O_1 O_2$; ce sens est arbitraire. Soient sur $O_1 x_1$ et $O_2 x_2$ les points A_1 et A_2, d'abscisses respectives

$$\overline{O_1 A_1} = a_1, \qquad \overline{O_2 A_2} = a_2.$$

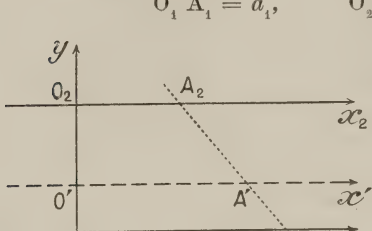

FIG. 21.

Joignons $A_1 A_2$ et menons un troisième axe $O'x'$ parallèle aux deux premiers et de même sens (fig. 21).

La position de ce nouvel axe sera définie par

$$\overline{O_1 O'} = l',$$

tandis que $\overline{O_1 O_2} = l$.

Soit alors a' l'abscisse de A' sur cet axe ; écrivons que les points $A_1 A_2 A'$ sont en ligne droite : il suffit pour cela de rapporter toute la figure aux axes de coordonnées ($O_1 x_1$, $O_1 y$) et d'appliquer la formule (23) p. 80. On a ici :

$$x_1 = a_1 \qquad x_2 = a_2 \qquad x_3 = a'$$
$$y_1 = 0 \qquad y_2 = l \qquad y_3 = l'$$

d'où la condition

$$l(a' - a_1) + l'(a_1 - a_2) = 0 ;$$

on en tire, en posant $\lambda = \dfrac{l'}{l}$:

$$a' = a_1(1 - \lambda) + \lambda a_2.$$

Cela posé, prenons deux équations linéaires à un nombre quelconque d'inconnues, 4 par exemple :

$$P_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t + e_1 = 0,$$
$$P_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t + e_2 = 0.$$

Pour connaître une de ces équations, il suffit évidemment de connaître ses 5 coefficients ; ceux-ci peuvent

être considérés comme les abscisses de 5 points sur un certain axe. Prenons donc un axe comportant une origine et un sens O_1x_1, et considérons sur cet axe les points A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, qui ont respectivement pour abscisses : a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 ; nous dirons que ces 5 points représentent l'équation P_1 (fig. 22).

Nous représenterons de même l'équation P_2 par 5 points A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 sur un axe O_2x_2, parallèle au premier et de même sens ; (nous le placerons de manière que O_1O_2 soit perpendiculaire aux axes, et à une distance $O_1O_2 = l$ arbitraire).

Prenons alors un troisième axe, $O'x'$ défini par $\overline{O_1O'} = l'$ (cet axe n'est pas nécessairement situé entre les deux autres et l' peut être un nombre quelconque, positif

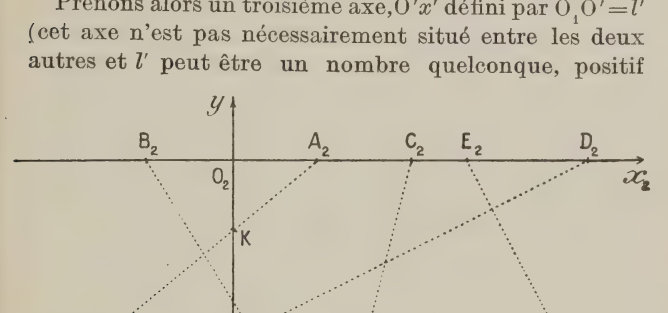

Fig. 22.

ou négatif) ; il coupe les droites A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2, E_1E_2 en des points A', B', C', D', E'. D'après ce qui a été dit au début, les abscisses de ces points sont

$$a' = a_1(1-\lambda) + \lambda a_2, \quad b' = b_1(1-\lambda) + \lambda b_2,$$
$$c' = c_1(1-\lambda) + \lambda c_2, \quad d' = d_1(1-\lambda) + \lambda d_2,$$
$$e' = e_1(1-\lambda) + \lambda e_2.$$

Ils représentent donc l'équation

$$(1 - \lambda)\, P_1 + \lambda\, P_2 = 0.$$

Cette équation étant une combinaison linéaire et homogène des deux équations données, peut remplacer l'une d'elles. Or il est évident qu'en choisissant convenablement la position de l'axe $O'x'$, on peut faire en sorte que cette nouvelle équation ne contienne pas l'une des inconnues ; par exemple, si on veut qu'elle ne contienne pas x, il n'y a qu'à prendre O' au point K : le point A' sera alors en K et aura une abscisse nulle ; l'équation

$$(1 - \lambda)\, P_1 + \lambda\, P_2 = 0,$$

où $\lambda = \dfrac{\overline{O_1K}}{\overline{O_1O_2}}$, ne contient pas x : on a ainsi éliminé l'inconnue x par une simple construction graphique.

52. Résolution graphique de n équations linéaires à n inconnues. — Considérons, pour fixer les idées, un système de 4 équations à 4 inconnues :

$$\begin{aligned} P_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t + e_1 = 0 \\ P_2 &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t + e_2 = 0 \\ P_3 &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3t + e_3 = 0 \\ P_4 &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4t + e_4 = 0 \end{aligned}$$

On vient de voir, au paragraphe précédent, comment on peut représenter chaque équation sur un axe et comment on peut éliminer graphiquement une variable entre deux équations.

On éliminera donc tout d'abord la variable x entre les équations P_1 et P_2, comme il a été dit ci-dessus ; on obtient ainsi un axe $O'x'$, avec 5 points (dont l'un est en O') qui représentent l'équation :

$$P' = (1 - \lambda')\, P_1 + \lambda'\, P_2 = 0, \qquad \lambda' = \frac{\overline{O_1O'}}{\overline{O_1O_2}}.$$

On éliminera de même x entre P_1 et P_3 : cette opération se fait sur la même épure que la première, en ajoutant quelque part l'axe $O_3 x_3$; on obtient ainsi un axe $O'' x''$ avec 5 points (dont l'un est en O'') qui représentent l'équation

$$P'' = (1 - \lambda'') P_1 + \lambda'' P_3 = 0, \qquad \lambda'' = \frac{\overline{O_1 O''}}{\overline{O_1 O_3}}.$$

Enfin on opère de même pour P_1 et P_4, ce qui donne un axe $O''' x'''$, avec 5 points qui représentent l'équation

$$P''' = (1 - \lambda''') P_1 + \lambda''' P_4 = 0, \qquad \lambda''' = \frac{\overline{O_1 O'''}}{\overline{O_1 O_4}}.$$

Les 3 équations P', P'' et P''', ne contenant pas x, constituent un système de 3 équations à 3 inconnues.

On traitera ce système comme le système primitif : on éliminera la variable y entre P' et P'', puis entre P' et P''', et on aura ainsi un système de 2 équations à 2 inconnues.

Ces deux équations ne contiendront donc que les inconnues z et t : une nouvelle élimination conduira à une équation ne contenant qu'une inconnue t.

Celle-ci n'a que deux coefficients qui sont les abscisses des deux points représentatifs : on lit donc ces abscisses sur le graphique et on en déduit la valeur de t.

Les autres inconnues se calculent alors en remontant de proche en proche.

Si l'on veut opérer exclusivement par voie graphique pour toutes les inconnues, il suffit de remarquer que, au lieu d'éliminer successivement x, y, z, on peut sans plus de difficultés éliminer 3 quelconques des variables, de manière à calculer la quatrième.

Remarque. — Les opérations ci-dessus peuvent se faire sur

la même épure ; puisqu'on peut choisir arbitrairement les points O_1, O_2, O_3, O_4, on fait ce choix de façon à rendre la figure aussi claire que possible. Il est bon d'employer des encres de teintes différentes pour les constructions qui concernent les diverses éliminations successives. En faisant une seule expérience, c'est-à-dire en résolvant effectivement par ce moyen un système de 4 équations à coefficients numériques, on se convaincra que les constructions indiquées ci-dessus, bien que nombreuses, donnent le résultat très rapidement.

II. — *ÉQUATIONS NON LINÉAIRES*

53. Préliminaires. — Soit une équation $f(x) = 0$, algébrique (1) ou transcendante. On dit qu'une racine x_0 (inconnue) (2) de cette équation est *séparée* lorsqu'on connaît un intervalle (a, b) qui contient x_0 et qui ne contient aucune autre racine de l'équation $f(x) = 0$.

On sait qu'il est en général impossible de résoudre rigoureusement une équation, c'est-à-dire d'obtenir des formules qui donnent la valeur exacte des racines : cela n'est possible que dans des cas très particuliers. Parmi ces cas exceptionnels il faut citer les équations algébriques de degré inférieur à 5 ; aussi ce qui va suivre n'est guère utilisé pour les équations de degré 1 ou 2 ; on l'utilise assez souvent pour les équations de degré 3 ou 4, bien que celles-ci puissent aussi se résoudre rigoureusement, parce que les opérations qui permettent cette résolution exacte sont longues et assez compliquées, surtout dans le cas du 4e degré ; du reste, la résolution exacte de l'équation du 3e degré est exposée plus loin (§ 58).

On verra par la suite des méthodes qui permettent

(1) On dit que l'équation $f(x) = 0$ est algébrique lorsque $f(x)$ est un polynome en x.

(2) Nous ne nous occupons que des *racines réelles*, seules intéressantes dans les applications pratiques usuelles.

de calculer une valeur *aussi approchée qu'on le veut* d'une racine, dès que cette racine est *séparée*. Il est donc très important de séparer toutes les racines d'une équation, c'est-à-dire d'avoir des valeurs grossièrement approchées de ces racines. Nous nous occuperons tout d'abord de ce problème.

54. Méthodes graphiques pour obtenir grossièrement les racines d'une équation f(x) = 0.

Première méthode. — Le moyen le plus immédiat consiste à construire la courbe $y = f(x)$: les racines cherchées sont les abscisses des points où la courbe coupe l'axe Ox.

La construction se fait sur du papier quadrillé ; on utilise tous les renseignements fournis par la théorie de la variation des fonctions ; en particulier, on utilise l'étude du signe de la dérivée $y' = f'(x)$ qui donne le sens de la variation : y croît ou décroît, suivant que y' est positive ou négative. L'étude du signe de la dérivée seconde donne le sens de la concavité de la courbe : concavité dirigée vers le haut ou vers le bas suivant que y'' est positive ou négative. Enfin, il faut évidemment calculer le plus grand nombre possible d'ordonnées de la courbe, surtout dans les régions où sa forme est douteuse ; on déterminera également le plus grand nombre possible de tangentes.

Lorsqu'on a achevé le dessin de la courbe, on aperçoit aisément les régions dans lesquelles cette courbe traverse l'axe Ox. Chacune de ces régions correspond à un intervalle compté sur cet axe, dont les extrémités fournissent des valeurs approchées de la racine correspondante.

Il est à remarquer, dans ces constructions comme dans celles des paragraphes suivants, *qu'il n'est pas indispensable de choisir la même unité pour mesurer les abs-*

cisses et les ordonnées, mais il faudra naturellement tenir compte de ces unités pour construire les tangentes (1).

Exemple I. —

Prenons l'équation

$$y = x^4 + 6x^3 + 14x^2 - 50 = 0 ;$$

on a :

$$y' = 2x(2x^2 + 9x + 14),$$

$$y'' = 12x^2 + 36x + 28.$$

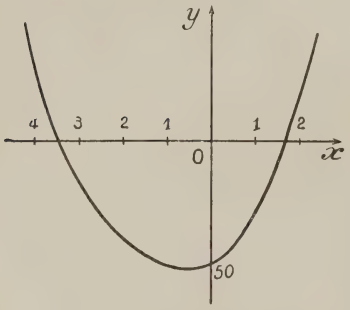

Fig. 24.

On voit immédiatement que, le trinome $2x^2 + 9x + 14$ étant toujours positif, y' a le signe de x ; de plus y'' est toujours positive.

La forme de la courbe est immédiate (fig. 24) ; on voit qu'elle ne peut couper Ox qu'en deux points ; en calculant quelques ordonnées, on voit que les racines sont respectivement dans les intervalles $(-4, -3)$ et $(1, 2)$.

(1) Rappelons cette construction : soit $f'(x) = \frac{\alpha}{\beta}$ la valeur de la dérivée au point M (β pouvant être égal à 1). Portons un vecteur $\overline{MK}$, parallèle à Ox, et de valeur algébrique égale à β, mesurée avec l'unité choisie pour les abscisses. Menons ensuite le vecteur $\overline{KT}$, parallèle à Oy et de valeur algébrique α, mesurée avec l'unité choisie pour les ordonnées. La tangente est MT (fig. 23). Si les nombres α et β correspondent à des vecteurs $\overline{MK}$ et $\overline{KT}$ trop grands ou trop petits pour le dessin, on les multipliera par une même constante.

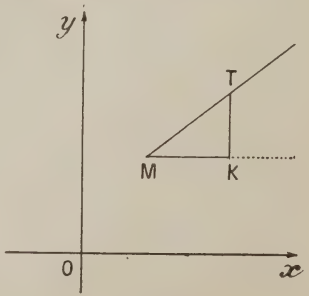

Fig. 23.

Exemple II. —

Soit l'équation

$$y = 3x^6 + 2x^3 - 2x^2 - 1 = 0 ;$$

on a :

$$y' = 2x(9x^4 + 3x - 2),$$

$$y'' = 2(45x^4 + 6x - 2).$$

Ici le signe de la dérivée y' dépend de celui du trinome :

$$z = 9x^4 + 3x - 2 ;$$

il faut commencer par étudier celui-ci ; or on a :

$$z' = 3(12x^3 + 1).$$

Donc z' est positive ou négative suivant que x est supérieur ou inférieur à $\frac{-1}{\sqrt[3]{12}}$; on en déduit les variations de z et par suite, son signe. Nous désignons par α et β les valeurs de x pour lesquelles z s'annule ; l'existence de ces valeurs est révélée par l'étude des variations de z et il est inutile de les connaître d'une manière plus précise ; les résultats sont consignés dans le tableau suivant, qui se construit ligne par ligne en partant du haut :

x	$-\infty$	α	$\frac{-1}{\sqrt[3]{12}}$		0	β	$+\infty$
z'		$-$	0		$+$	$+$	$+$
z	$+\infty$	$\searrow 0 \searrow$	$\frac{-9}{4\sqrt[3]{12}}$	$-2 \nearrow$	$-2 \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$ 0	$+$
y	$+\infty \searrow$	min	$\nearrow$	max $= -1 \searrow$		min	$\nearrow +\infty$

En calculant quelques ordonnées on obtient la forme ci-contre (fig. 25) ; on voit qu'il n'y a que deux racines, situées respectivement dans les intervalles $(-2, -1)$ et $(0, 1)$.

Deuxième méthode. — Ecrivons l'équation à résoudre en faisant passer certains termes au second membre : elle prendra ainsi la forme

(51) $$g(x) = h(x).$$

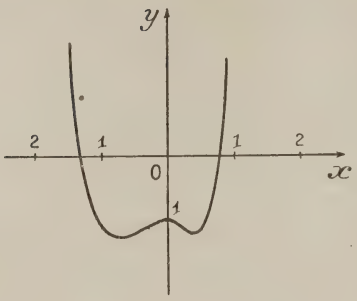

Fig. 25.

Cela est toujours possible et même, en général, de beaucoup de manières ; on choisira celle qui conduit aux constructions les plus simples et les plus claires pour la suite.

Il est alors bien évident que les racines de l'équation ci-dessus sont les abscisses des points communs aux deux courbes

$$(C_1) \quad y = g(x), \qquad (C_2) \quad y = h(x).$$

On construira donc ces deux courbes sur du papier calibré, comme il a été dit dans la première méthode.

Il semble que cette méthode soit plus compliquée que la première, puisqu'elle exige la construction de deux courbes, au lieu d'une seule ; mais il peut se faire que ces deux courbes se construisent beaucoup plus facilement que la courbe unique du premier cas, et on n'emploiera cette deuxième méthode que lorsqu'il en sera ainsi.

Exemple III. — Soit à résoudre l'équation trinome du troisième degré : $x^3 + px + q = 0$.

On a déjà vu un abaque à points alignés qui permet de faire cette résolution (§ 33) ; la méthode actuelle conduit à un abaque aussi simple. Ecrivons l'équation

$$x^3 = -px - q ;$$

les racines seront donc les abcisses des points communs aux deux courbes

$$(C_1) \quad y = x^3, \qquad (C_2) \quad y = -px - q.$$

La première est aisée à construire ; ne dépendant ni de p, ni de q, *elle servira pour toutes les équations* trinomes du troisième degré ; la deuxième est une droite qui se construit immédiatement en remarquant qu'elle coupe les axes au point d'abscisse $-\frac{q}{p}$ sur Ox, et au point d'ordonnée $-q$ sur Oy.

Remarque I. — Il suffit de construire la courbe (C_1) pour les abscisses positives, ainsi que la droite (C_2). Les intersections de ces deux demi-courbes donneront les racines positives.

Pour avoir les racines négatives, on se souviendra de ce que l'équation

$$(-x)^3 + p(-x) + q = 0 \text{ ou } x^3 + px - q = 0$$

admet les mêmes racines que $x^3+px+q=0$, *mais changées de signe* : les racines négatives de celle-ci sont donc les racines *positives* de $x^3+px-q=0$; on les obtiendra donc par l'intersection de la même demi-courbe (C_1) : $y=x^3$ (pour $x>0$), avec la droite $y=-px+q$ qui n'est pas la même que précédemment, mais dont la construction est immédiate.

Cette remarque s'applique à toutes les équations.

Remarque II. — La croissance de la fonction $y=x^3$ est très rapide et on risquerait de voir le plus souvent les points d'intersection en dehors du cadre de l'épure si on prenait la même unité pour les abscisses et les ordonnées ; il sera bon de prendre ici sur Oy une unité 20 fois plus petite que sur Ox.

Exemple IV. — Figure d'équilibre d'un fil pesant, de longueur donnée, dont on fixe les extrémités. —

On sait que la figure d'équilibre est une chaînette d'axe vertical. Supposons, pour simplifier, que les extrémités du fil soient fixées en deux points A et B situés sur une même horizontale.

Prenons les axes de coordonnées indiqués ci-contre (fig. 26) et appelons $2l$ la longueur du fil.

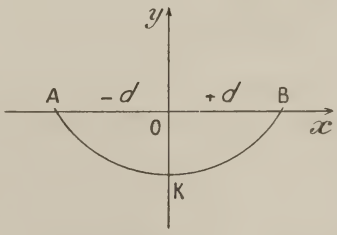

Fig. 26.

L'équation de la chaînette sera

$$y = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right] + b = a\,ch\,\frac{x}{a} + b\,;$$

les inconnues du problème sont les constantes a et b, qu'il faut calculer au moyen des données l et d. On aura une première équation en écrivant que le fil a pour longueur $2l$:

$$l = \int_0^d ds = \left[a\,sh\,\frac{x}{a}\right]_0^d = a\,sh\,\frac{d}{a}\,;$$

en outre la courbe doit passer par A et par B, ce qui donne :

$$0 = a\,ch\,\frac{d}{a} + b.$$

Calculons d'abord a ; on le tire de la première équation

$$l = a\,sh\,\frac{d}{a},$$

qui se résout très simplement de la manière suivante : posons $x' = \frac{d}{a}$, il vient ainsi :

$$sh\,x' = \frac{l}{d}\,x'.$$

On aura donc x' par l'intersection des deux courbes (dans la région des abscisses positives) :

$y = sh\,x'$ courbe connue de $sh\,x$,

$y = \frac{l}{d}\,x'$ droite passant par O.

La première ne dépend pas des données et constituera un véritable abaque pour les problèmes de cette nature.

La deuxième est une droite qui passe par O et par le point de coordonnées (d, l) : on l'a donc immédiatement.

L'intersection n'existe que si $l > d$, comme cela était à prévoir. Connaissant x', on en tirera la valeur de $a = \frac{d}{x'}$.

Pour avoir la deuxième inconnue b du problème, on remarquera que

$$b = -a\,ch\,\frac{d}{d} = -a\sqrt{1 + \frac{l^2}{a^2}} = -\sqrt{a^2 + l^2}\,;$$

b est donc, en valeur absolue, l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les autres côtés sont a et l.

Le point K a pour ordonnée

$$k = a + b = a - \sqrt{a^2 + l^2}\,;$$

cette ordonnée est essentiellement négative ; la *flèche* OK est donc égale à $\sqrt{a^2 + l^2} - a$.

Par exemple, si $l = 5$ et $d = 3$, le dessin montre sans difficulté que $1 < x' < 2$, d'où $\frac{3}{2} < a < 3$.

Exemple V. — Soit à résoudre l'équation transcendante

$$\sin x + \frac{1}{10} \cos x - x = 0.$$

On prendra les intersections des deux courbes

$$(C_1) \quad y = \sin x + \frac{1}{10} \cos x, \quad (C_2) \quad y = x.$$

La deuxième est la bissectrice de l'angle principal des axes de coordonnées. La première se construit facilement par points, au moyen d'une table de sinus et de cosinus.

On peut remarquer tout d'abord qu'on a nécessairement

$$\left.\begin{array}{l} -1 < \sin x < 1 \\ -\frac{1}{10} < \frac{1}{10} \cos x < \frac{1}{10} \end{array}\right\} \text{ d'où } -\frac{11}{10} < \sin x + \frac{1}{10} \cos x < \frac{11}{10}.$$

La droite $y = x$ ne peut donc couper la courbe (C_1) que dans la région où son ordonnée est comprise entre $-1{,}1$ et $+1{,}1$; comme l'ordonnée est égale à l'abscisse, cette région correspond à

$$-1{,}1 < x < +1{,}1.$$

Il suffit donc de construire les deux courbes dans cet intervalle, et la construction montre sans difficulté qu'il n'y a qu'un seul point d'intersection, dont l'abscisse est comprise entre 0 et 1.

On pourrait aussi, pour construire (C_1), remarquer que l'on peut écrire (1) :

$$\sin x + \frac{1}{10} \cos x = \frac{\sqrt{101}}{10} \sin(x + \alpha),$$

avec :

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{101}}{101}, \quad \cos \alpha = \frac{10\sqrt{101}}{101} ;$$

(1) Toute fonction harmonique : $a \sin x + b \cos x$ peut s'écrire sous la forme $A \sin(x + \alpha)$.

les tables de la fin du volume donnent, par interpolation,

$$\sqrt{101} = 10{,}0499, \qquad \frac{\sqrt{101}}{101} = 0{,}09950,$$

d'où

$$\alpha = 5^\circ\ 42',62 ;$$

il n'y a pas intérêt à transformer les fractions décimales de minutes en secondes. Il faut maintenant traduire α en longueur d'arc ou, ce qui revient au même, en radians ; la table VI donne immédiatement :

$$\alpha = 0{,}099.$$

La courbe (C_1) est alors très facile à construire au moyen d'une table de sinus, sa forme générale est d'ailleurs connue et il suffit de considérer l'intervalle $(-1{,}1\ +1{,}1)$.

Emploi de nomogrammes. — On peut aussi, bien entendu, obtenir les racines par l'emploi de nomogrammes construits à cette intention : c'est ce que l'on fait lorsqu'on a souvent à résoudre le même type d'équations ; nous avons indiqué sommairement, au chapitre III, la construction et l'usage des nomogrammes; la méthode développée ci-dessus, pour l'exemple III, revient à l'établissement d'un abaque.

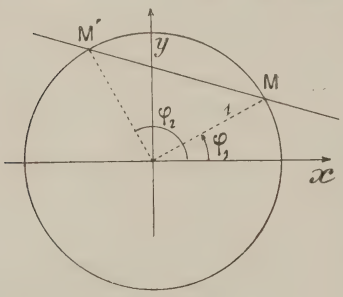

Fig. 27.

Dans certains cas, la nature de l'équation peut donner lieu à des constructions particulières ; prenons par exemple l'équation bien connue

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = c,$$

On pourrait la résoudre par la construction des courbes

$$y = a \sin x + b \cos x, \qquad y = c,$$

qui se ferait exactement comme dans l'exemple V ci-dessus. Mais il est plus simple de remarquer ici que si l'on trace les deux courbes

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{(cercle)},$$
$$ax + by = c \qquad \text{(droite)},$$

en appelant M et M′ les points d'intersection, les angles

$$\varphi_1 = \widehat{x\,\mathrm{OM}} \qquad \varphi_2 = \widehat{x\,\mathrm{OM'}}$$

seront les solutions cherchées (fig. 27), car les coordonnées du point M_1 par exemple sont $\cos\varphi_1$ et $\sin\varphi_1$. On voit d'ailleurs sur la figure que ces solutions n'existent que si l'on a la condition bien connue $a^2 + b^2 \geqslant c^2$.

Cas des équations algébriques. — Dans ce cas, $f(x)$ sera un polynome

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

dans lequel on peut toujours supposer $a_n > 0$: on changerait tous les signes de l'équation s'il n'en était pas ainsi. On connaît alors dans ce cas des propriétés qui facilitent l'application des méthodes générales exposées précédemment (1). En particulier on peut trouver une borne inférieure et une borne supérieure des racines d'une équation algébrique ; ces bornes délimitent ainsi un intervalle hors duquel il n'y a point de racine,et il suffit de limiter les recherches à l'intérieur de cet intervalle.

Il existe plusieurs formules donnant une *borne supérieure* des racines positives de l'équation ; l'une de ces formules est la suivante ; en appelant

(1) La proposition suivante, bien connue sous le nom de théorème de Rolle, permet (théoriquement) de séparer les racines d'une équation algébrique : entre deux racines consécutives de l'équation dérivée $f'(x) = 0$, il y a au maximum une racine de l'équation algébrique $f(x) = 0$. Cette proposition s'applique d'ailleurs à toutes les équations $f(x) = 0$, algébriques ou non, dans les intervalles où $f(x)$ et $f'(x)$ sont définis ; mais il est facile de se rendre compte qu'elle n'apprend rien de plus que l'étude graphique faite ci-dessus (§ 54, première méthode).

p le nombre de coefficients négatifs,

N la valeur absolue la plus grande de ces coefficients négatifs,

m le degré le plus élevé des termes à coefficients négatifs, les racines positives de l'équation ne peuvent dépasser le plus grand des deux nombres

$$1 \quad \text{et} \quad \sqrt[n-m]{\frac{p\,N}{a_n}}, \qquad (a_n > o).$$

Par exemple, pour l'équation de l'exemple II, on a $n = 6$, $a_n = 3$, $p = 2$, $N = 2$, $m = 2$.

Donc

$$\sqrt[n-m]{\frac{p\,N}{a_n}} = \sqrt[4]{\frac{4}{3}};$$

ce nombre étant plus grand que 1, c'est lui qui sera la borne supérieure des racines positives.

On aura une *borne inférieure* des racines négatives en utilisant la remarque I de l'exemple III ; les racines négatives de l'équation

$$3x^6 + 2x^3 - 2x^2 - 1 = 0$$

sont les racines positives de

$$3(-x')^6 + 2(-x')^3 - 2(-x')^2 - 1 = 0$$

ou

$$3x'^6 - 2x'^3 - 2x'^2 - 1 = 0;$$

la règle ci-dessus donne comme borne supérieure :

$$x' < \sqrt[3]{2} \qquad \text{d'où } x > -\sqrt[3]{2}.$$

On voit donc que les racines de l'équation sont toutes comprises dans l'intervalle

$$-\sqrt[3]{2} < x < +\sqrt[4]{\frac{4}{3}}.$$

Il suffit donc d'appliquer les méthodes générales exposées ci-dessus à l'intérieur de cet intervalle.

On peut aussi, dans le cas d'une équation algébrique, utiliser

la méthode graphique des *orthogones*, exposée au § 16, pour trouver les racines.

On trace tout d'abord l'orthogone fondamental du polynome $f(x)$; il s'agit alors de trouver la direction du premier côté de l'orthogone secondaire, telle que ce deuxième orthogone aboutisse au même point final que le premier, c'est-à-dire telle que R coïncide avec A_0 (fig. 4). On y arrive par des tâtonnements ; ceux-ci sont simplifiés par l'emploi d'un papier *transparent* quadrillé au millimètre, qu'on applique sur l'orthogone fondamental : on suit de l'œil les côtés successifs de l'orthogone secondaire, et on déplace le transparent de façon à amener la coïncidence des extrémités.

Cette méthode est commode et assez rapide, mais *peu sûre*, car on ne sait jamais si on a ainsi obtenu *toutes* les racines réelles, quelqu'une pouvant passer inaperçue. Par contre, lorsqu'on veut calculer rapidement une racine déjà isolée, c'est-à-dire connue grossièrement, la méthode ci-dessus (due à *Lill*), donne de bons résultats.

55. Calcul plus précis des racines par voie graphique. Méthode d'extension. — Ayant séparé les racines par les moyens que nous venons d'indiquer, il reste à les *approcher* d'une manière plus précise ; ceci peut se faire soit graphiquement, soit par le calcul.

Le procédé graphique que nous allons exposer ici est en général le plus commode et le plus rapide.

Soit à calculer une racine de $f(x) = 0$ comprise dans l'intervalle (a, b) qui n'en contient pas d'autre (1). Calculons les ordonnées $f(a)$, $f(b)$, ainsi que les dérivées $f'(a)$, $f'(b)$; ces calculs se font, soit directement, soit graphiquement, selon les cas ; si les nombres a et b donnaient lieu à des calculs trop compliqués, on les remplacerait par des nombres très voisins et plus simples, ce qui ne changerait rien au résultat.

(1) Nous supposerons que la courbe traverse Ox entre a et b (c'est-à-dire que la racine est d'ordre impair), sans quoi elle serait tangente à Ox ; l'algèbre permet alors de simplifier le problème ; en tout cas la racine est aussi racine de la dérivée $f'(x) = 0$, mais d'ordre impair. On pourrait alors l'obtenir comme il suit, en résolvant $f'(x) = 0$ au lieu de $f(x) = 0$.

On peut ainsi construire les 2 points A et B, d'abscisses a et b, et les tangentes en ces points ; le signe de la dérivée seconde $f''(x)$ permet en outre de connaître le sens de la concavité : avec ces simples renseignements on construit l'arc de courbe AB à une échelle aussi grande que possible (fig. 28).

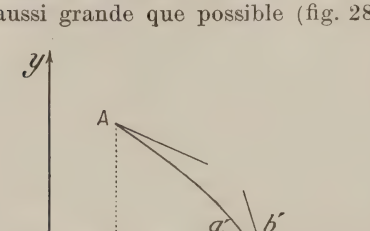

Fig. 28.

Ce dessin ne sera pas très exact, et l'intersection de l'arc avec Ox n'est pas connue avec grande précision ; mais il permet toujours, d'après la disposition des points A, B et des tangentes, de déterminer un nouvel intervalle (a', b') qui comprend la racine et qui est 5 à 10 fois plus petit que le précédent (a, b). On choisit pour a' et b' des valeurs aussi simples que possible.

Cela fait, on recommence l'opération ci-dessus, en remplaçant l'intervalle (a, b) par a', b') et en prenant une échelle 5 à 10 fois plus grande, de manière que sur le nouveau dessin, la distance a', b' soit à peu près la même que la distance (a, b) dans le dessin précédent.

On obtient ainsi un nouvel intervalle (a'', b''), pour lequel on recommence l'opération en lui faisant subir une extension comme ci-dessus.

Il est rare qu'au bout de 3 opérations, les tangentes en A'' *et* B'' *ne soient pas confondues sur le dessin avec la corde* A'' B'' *elle-même : on a alors atteint la limite de précision que peut donner le dessin, et l'arc se confond pratiquement avec la corde* A'' B'', *dont l'intersection avec* Ox *donne la racine.*

Quelquefois même cela arrive dès la seconde opération. L'expérience montre qu'on obtient ainsi généralement la racine avec une erreur absolue comprise entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{1000}$.

Remarque I. — Les calculs des ordonnées et des dérivées doivent se faire avec d'autant plus de précision que l'on se rapproche davantage du résultat : il est bon de les faire avec 2 *décimales de plus* que n'en comporte l'ordre de grandeur de l'intervalle $b - a$.

Remarque II. — L'axe des y est tout à fait inutile dans les opérations que nous venons de décrire : on peut donc le supposer placé *en dehors* de l'épure, laquelle ne comporte que la partie du dessin qui contient l'arc AB ; cela permet de prendre une échelle plus grande et de réserver toute la feuille d'épure pour la partie vraiment utile du dessin.

Exemple VI. — Reprenons l'équation

$$\sin x + \frac{1}{10}\cos x - x = 0.$$

Nous avons vu plus haut (ex. V), au moyen d'un dessin qui peut être très grossier dans la partie positive des abscisses, que cette équation n'admet qu'une racine comprise entre 0 et 1.

Les tables dont nous disposons à la fin du volume nous donnent les *sinus* et *cosinus* des angles exprimés en degrés ; or $x = 1$ correspond à une valeur assez compliquée quand on l'exprime en degrés, tandis que la table VI nous montre immédiatement que l'arc

$$x = 1{,}047 \quad \text{correspond à l'angle de } 60°.$$

Nous construirons donc l'arc de courbe pour

$$0 < x < 1{,}047,$$

ce qui correspond, en degrés, à l'intervalle (0°, 60°). On a ici :

$$y = \sin x + \frac{1}{10}\cos x - x,$$

$$y' = \cos x - \frac{1}{10} \operatorname{sfn} x - 1,$$

$$y'' = -\sin x - \frac{1}{10} \cos x.$$

Comme $\sin x$ et $\cos x$ sont positifs, on a $y'' < 0$ et la concavité est tournée vers le bas.

On a : $f(0) = 0{,}1, \quad f'(0) = 0$;

pour $x = 1{,}047$, on a le sin. et le cos. par les tables :

$$\sin x = \sin 60° = \cos 30° = 0{,}87$$
$$\cos x = \cos 60° = \sin 30° = 0{,}50.$$

Nous prenons 2 décimales, puisque la longueur de l'intervalle est ici environ égale à 1. On a donc :

$$f(1{,}047) = -0{,}13, \quad f'(1{,}047) = -0{,}59.$$

Faisons le dessin à l'échelle de 20 cm. pour unité de longueur, par exemple (1) ; il montre sans doute possible que

$$0{,}7 < x < 0{,}8.$$

Ces nombres donneraient un calcul trop compliqué ; mais la table VI nous montre immédiatement que

0,698 correspond à 40°,
0,873 correspond à 50°.

Nous allons donc prendre l'intervalle (40°, 50°), soit

$$0{,}698 < x < 0{,}873 ;$$

ce nouvel intervalle est environ 5 fois plus petit que l'ancien. Nous prendrons cette fois l'échelle de 100 cm. pour unité de longueur ; l'ordre de grandeur de l'intervalle étant ici 0,2 nous ferons les calculs avec 3 décimales ; les tables II et III nous donnent d'ailleurs les *sin.* et *cos.* de 40° et 50° et on trouve ainsi :

$$f(0{,}698) = 0{,}022, \quad f'(0{,}698) = -0{,}298,$$
$$f(0{,}873) = -0{,}043, \quad f'(0{,}873) = -0{,}434.$$

L'espace compris entre la corde et les tangentes est ici très étroit ; les tangentes sont presque confondues avec la corde et on voit sans difficulté que

$$0{,}756 < x < 0{,}766,$$

ce qui permet de prendre $x = 0{,}76$ à $\frac{1}{100}$ près.

On a ainsi obtenu l'approximation de $\frac{1}{100}$ au bout de 2 opérations.

(1) Le lecteur est prié de faire l'épure.

56. Recherche précise des racines par le calcul. Méthodes d'approximation. — La méthode indiquée au paragraphe précédent ne fournit pas une précision illimitée. Nous allons ici en exposer une autre (1), basée uniquement sur le calcul, qui permet d'obtenir la racine avec une erreur aussi petite que l'on veut.

Soit à calculer une racine de $f(x) = 0$, qui est séparée dans l'intervalle (a, b). Nous supposerons encore que la courbe traverse Ox entre a et b (voir la note de la p. 157). Il est alors indispensable, pour guider la marche des opérations, de faire un schéma représentant l'arc de courbe $y = f(x)$ entre les abscisses a et b.

Ce schéma grossier se fait sans aucune mesure de longueur et sans instrument : il suffit de respecter la position relative des divers points et le sens de la concavité qui est connu d'après le signe de $f''(x)$ dans l'intervalle.

Il y a 4 cas de figure possibles, suivant la position des points A et B et le sens de la concavité, mais il suffit d'indiquer la marche à suivre sur l'un d'eux.

Supposons donc qu'on ait le schéma de la figure 29. La courbe étant à peine indiquée et sans précision, ne peut nullement nous renseigner sur la position de la racine ; choisissons donc une valeur quelconque c, comprise entre a et b ;

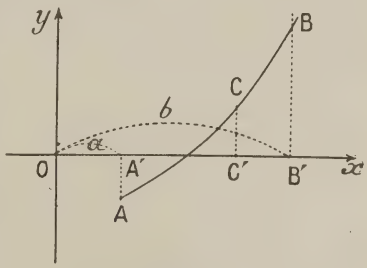

Fig. 29.

(1) En réalité cette méthode n'est guère que la traduction par le calcul des opérations faites graphiquement dans le paragraphe précédent.

cette abscisse correspond à un point C de la courbe dont nous calculerons l'ordonnée $f(c)$; on voit que si $f(c) > 0$, c'est que le point C correspondant est au-dessus de Ox, et par suite que la racine est entre a et c ; si $f(c) < 0$, c'est que la racine est entre c et b.

Dans les deux cas nous avons donc restreint l'intervalle d'indétermination.

Sur un autre cas de figure, on raisonnerait de même ; de toute façon l'examen de la figure renseigne sur la position de la racine par rapport à c.

Il n'y a plus qu'à recommencer un nombre suffisant de fois pour que l'intervalle d'indétermination soit devenu aussi petit qu'on le désire : on a ainsi une valeur approchée par défaut et une valeur approchée par excès, qu'on peut rendre aussi voisines qu'on le veut l'une de l'autre.

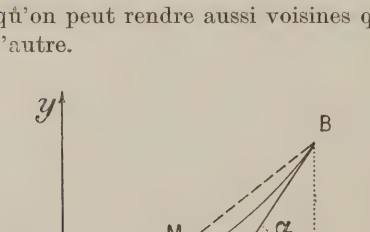

Fig. 30.

Ce procédé est connu sous le nom de *méthode des substitutions*, parce qu'il est fondé sur la substitution à x de valeurs telles que c dans $f(x)$.

Cette méthode entraîne des calculs généralement très longs, par le fait même que le choix des valeurs c à substituer est laissé au hasard.

Lorsque la concavité garde le même sens tout le long de l'arc AB (c'est-à-dire lorsque $f''(x)$ garde le même signe sur cet arc), on abrège notablement les calculs et on réduit le nombre des tâtonnements en utilisant la *remarque* suivante :

Le point d'intersection de l'arc AB *avec* Ox *est compris entre le point* M, *où la corde* AB *coupe* Ox, *et le point d'intersection* T (*avec* Ox) *de la tangente en l'un des points* A *ou* B *convenablement choisi* (*fig.* 30).

L'examen de la figure dans chaque cas rend cette remarque évidente et indique le point qu'il faut choisir pour mener la tangente. Sur la figure 30, il faut évidemment mener la tangente en B ; on démontre d'une manière générale qu'il faut choisir celui des deux points A et B dont l'ordonnée a le même signe que $f''(x)$.

L'intervalle d'indétermination de la racine est réduit ainsi à MT : cela revient à dire qu'on remplace ici A′ par M et B′ par T. L'opération qui consiste à remplacer A′ par M porte le nom de *méthode de la corde, ou des parties proportionnelles* ; celle qui consiste à remplacer B′ par T porte le nom de *méthode de la tangente, ou de Newton.*

Il faut, comme on vient de le voir, *les employer simultanément.*

Abscisse du point M. — Cette abscisse est donnée par une formule de la géométrie analytique ; nous pouvons la retrouver ici en appliquant aux trois points A, M, B, la condition (23) pour que 3 points soient en ligne droite ; on obtient ainsi, en appelant m l'abscisse cherchée :

$$m = \frac{a\,f(b) - b\,f(a)}{f(b) - f(a)} = a - f(a)\,\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

Mais il est inutile de retenir cette formule ; puisqu'il faut faire la figure dans chaque cas, on peut utiliser cette figure pour faire le calcul ; les triangles semblables AA′M et BB′M donnent ici :

$$\frac{A'M}{AA'} = \frac{B'M}{BB'} \quad \text{d'où} \quad = \frac{A'B'}{AA' + BB'},$$

donc

$$A'M = A'B' \times \frac{AA'}{AA' + BB'}.$$

Toutes les quantités figurant au second membre sont connues : il ne faut pas oublier toutefois que ce sont des longueurs, *essentiellement positives* ; ainsi on a ici :

$$AA' = |f(a)|.$$

On calcule donc A'M et on ajoute cette longueur à OA' pour avoir l'abscisse m cherchée. Il faut faire ces calculs avec deux décimales de plus que n'en comporte l'ordre de grandeur de l'intervalle $(b - a)$.

Abscisse du point T. — Les formules de la géométrie analytique donnent, en appelant t cette abscisse :

$$t = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

On peut aussi calculer t en utilisant la figure ; dans le triangle BTB' on a, *en valeur absolue* :

$$B'T = \frac{BB'}{tg\,\alpha};$$

or,

$$tg\,\alpha = |f'(b)|,$$

donc

$$B'T = \left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|;$$

d'ailleurs la figure montre qu'il faut ici retrancher B'T de b pour avoir l'abscisse cherchée.

Ces calculs doivent se faire, comme les précédents, avec 2 décimales de plus que n'en comporte l'ordre de grandeur de l'intervalle $(b - a)$.

Remarque importante. — Le calcul des abscisses de M et de T ne se fait pas exactement ; si l'on voulait être rigoureusement sûr que la racine se trouve bien entre les deux abscisses ainsi obtenues, la figure montre immédiatement qu'il serait nécessaire de diriger les calculs de A'M et B'T de manière que leur résultat soit obtenu *par défaut* dans les deux cas. Si l'on calculait en effet A'M par excès, l'abscisse ainsi obtenue risque-

rait d'être plus grande que la racine, et celle-ci ne serait peut-être plus à l'intérieur du nouvel intervalle.

Cette précaution, qui entraînerait d'assez grandes complications, est pratiquement tout à fait inutile : il suffit de faire, comme on l'a dit, tous les calculs avec 2 décimales de plus que n'en comporte l'ordre de grandeur de l'intervalle, sans s'occuper d'autre chose ; cela n'empêche pas, à l'occasion, quand cela n'introduit pas de difficulté, de faire les opérations de manière à diminuer plutôt qu'à augmenter le résultat.

Marche à suivre dans la pratique. — On calcule les abscisses des points M et T comme il vient d'être dit.

L'intervalle d'indétermination étant ainsi réduit, on pourrait être tenté de recommencer les opérations en faisant jouer à M et T le rôle de A′ et B′.

Il faut se garder d'agir ainsi, car les abscisses m et t ont en général une valeur compliquée (trop de décimales), et le calcul des ordonnées correspondantes serait d'une longueur disproportionnée à la précision du résultat.

On prendra, au lieu de M, un point très voisin M_1 mais ayant une abscisse m_1 aussi simple que possible pour le calcul de l'ordonnée; ce point M_1 devra être pris, dans le cas de la figure 30, *à droite de* M, et voici pourquoi :

on doit calculer de toutes façons l'ordonnée $f(m_1)$; alors, si $f(m_1) < 0$, le point M_1 remplacera avantageusement le point M puisqu'il est du même côté de la racine, mais plus près ;

si $f(m_1) > 0$, la racine se trouve entre M et M_1: l'intervalle d'indétermination se trouve extrêmement réduit d'un seul coup et il devient absolument inutile de considérer le point T.

On verra, dans les exemples qui suivent, les simplifications qui découlent de cette manière de procéder.

Des remarques analogues sont à faire pour le point T (si sa considération reste nécessaire, c'est-à-dire si $f(m_1) < 0$) ; on recherchera dans son voisinage, mais à *gauche*, un point d'abscisse plus simple dont on calculera l'ordonnée correspondante.

L'examen de la figure indique toujours la conduite à suivre, en s'inspirant des idées très simples ci-dessus.

On se retrouve alors dans les mêmes conditions qu'au début du problème, sauf que l'intervalle d'indétermination est plus petit ; on peut le réduire encore en opérant exactement de même, et ainsi de suite. On arrivera ainsi évidemment à connaître la racine avec telle approximation que l'on voudra (voir représentation géométrique, § 8, p. 8).

Exemple VII. — Reprenons l'équation de l'exemple I :

$$y = x^4 + 6x^3 + 14x^2 - 50 = 0.$$

On a vu qu'elle admet deux racines seulement, situées respectivement dans les intervalles (—4, —3) et (1, 2). On a ici :

$$y' = 4x^3 + 18x^2 + 28x,$$
$$y'' = 12x^2 + 36x + 28.$$

Toutes les valeurs se calculeront en utilisant la table I de la fin du volume.

Proposons-nous d'abord de calculer la racine négative. On a :

$$f(-4) = +46, \quad f(-3) = -5.$$

La dérivée seconde étant toujours positive, on aura le schéma ci-contre (fig. 31) ; on prendra ici la tangente au point A ; on trouve ainsi :

$$MB' = A'B' \times \frac{BB'}{AA' + BB'} ;$$

ici : $A'B' = 1, \quad BB' = 5, \quad AA' = 46.$ Par suite,

$$MB' = \frac{5}{51} = 0{,}09\ldots$$

On a ensuite :

$$A'T = \left| \frac{f(-4)}{f'(-4)} \right| = \frac{46}{80} = 0{,}57\ldots,$$

Nous faisons les calculs avec 2 décimales, parce que $A'B' = 1$, et par défaut. On a donc :

$$-3{,}43 < x < -3{,}09.$$

Nous ne formerons pas $f(-3{,}43)$, *mais plutôt* $f(-3{,}4)$, qui donne des calculs plus faciles : on trouve

$$f(-3{,}4) = +9{,}6496.$$

On voit ainsi que la racine est supérieure à $-3{,}4$: donc *nous nous sommes rapprochés de la racine, tout en simplifiant les calculs.*

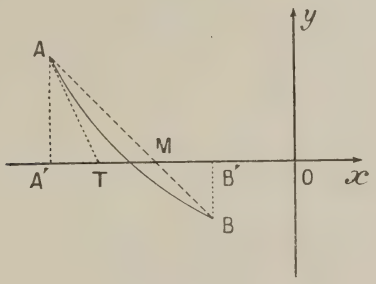

FIG. 31.

De même, au lieu de substituer $-3{,}09$ nous prendrons $f(-3{,}1)$, ce qui donne

$$f(-3{,}1) = -1{,}8539.$$

Nous savons donc maintenant que

$$-3{,}4 < x < -3{,}1,$$

et nous connaissons les ordonnées des extrémités de l'intervalle. Il n'y a donc qu'à recommencer les opérations ci-dessus ; le schéma sera exactement le même, mais B′ aura pour abscisse $-3{,}1$ et A′ $-3{,}4$. On aura donc :

$$A'B' = 0{,}3 \quad BB' = 1{,}8539, \quad AA' = 9{,}6496.$$

D'où

$$MB' = 0{,}3 \times \frac{1{,}8539}{11{,}5035} = 0{,}048\ldots,$$

$$A'T = \frac{9{,}6496}{44{,}336} = 0{,}217\ldots.$$

Nous avons fait les calculs par défaut et avec 3 décimales car $A'B' = 0{,}3$. On a ainsi :

$$-3{,}183 < x < -3{,}148.$$

L'intervalle d'indétermination a pour longueur 0,035.

On prendra, par exemple,

$$x = -3{,}16, \quad \text{erreur absolue} < \frac{23}{1000}.$$

Calculons dans les mêmes conditions la racine positive. On a : $f(1) = -29$, $f(2) = +70$; la dérivée seconde est toujours positive ; par suite on a le schéma de la fig. 32, avec les valeurs suivantes :

$$A'B' = 1, \quad AA' = 29, \quad BB' = 70,$$

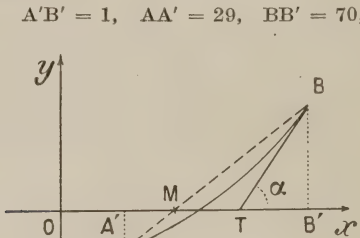

Fig. 32.

d'où

$$A'M = \frac{29}{99} = 0{,}29\ldots,$$

$$B'T = \frac{70}{160} = 0{,}43\ldots$$

Par suite, $1{,}29 < x < 1{,}57.$

Au lieu de substituer 1,29, nous essaierons 1,3 ; on trouve

$$f(1{,}3) = -10{,}3019.$$

Donc la racine est supérieure à 1,3 et nous nous en sommes rapprochés tout en simplifiant le calcul ; de même au lieu de 1,57, nous substituerons 1,5 ; on trouve

$$f(1{,}5) = +6{,}8125,$$

par suite, $1{,}3 < x < 1{,}5.$

On recommencera les opérations en utilisant le même schéma (fig. 32), dans lequel les abscisses de A′ et B′ seront maintenant 1,3 et 1,5. On trouve alors :

$$A'M = 0{,}120\ldots,\quad B'T = 0{,}070\ldots,$$

par suite,

$$1{,}420 < x < 1{,}430.$$

On connaît donc la racine avec une erreur absolue inférieure à 0,01.

En continuant de même, on augmenterait naturellement cette précision.

Exemple VIII. — Reprenons l'équation transcendante de l'exemple V :

$$y = \sin x + \frac{1}{10}\cos x - x = 0,$$

qui a été résolue graphiquement dans l'exemple VI.

L'étude graphique grossière faite dans l'exemple V a montré que cette équation n'admet qu'une racine, qui est comprise entre 0 et 1.

On a :

$$y' = \cos x - \frac{1}{10}\sin x - 1,$$

$$y'' = -\cos x - \frac{1}{10}\sin x.$$

La dérivée seconde est donc négative ; pour calculer les ordonnées nous ferons comme dans l'exemple VI: l'arc $x = 1$ ayant un sinus et un cosinus assez compliqués à calculer, nous remplacerons ce nombre par 1,047 qui, d'après la table, correspond à l'angle de 60°.

On a alors le schéma ci-contre (fig. 33), avec

$$AA' = f(0) = 0{,}1,$$
$$BB' = |f(1{,}047)| = 0{,}13,$$
$$A'B' = 1{,}047.$$

On en déduit

$$A'M = A'B' \times \frac{AA'}{AA' + BB'} = 0{,}45\ldots,$$

$$B'T = \frac{0{,}13}{0{,}59} = 0{,}22\ldots.$$

Les calculs sont faits avec 2 décimales, puisque l'intervalle

est égal environ à l'unité, et la division est faite par défaut. Par suite,

$$0{,}45 < x < 0{,}83.$$

La table VI nous montre que l'angle de 30° (3 degrés × 10) correspond à $x = 0{,}524$; au lieu de substituer 0,45, nous pren-

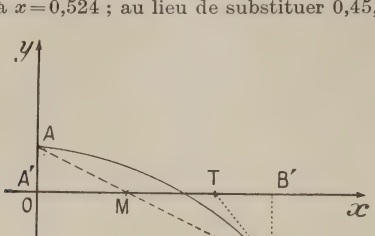

Fig. 33.

drons $x = 0{,}524$ qui *donne des calculs plus simples* et qui est à droite du précédent. On trouve sans difficulté :

$$f(0{,}524) = 0{,}063 \quad \text{donc } x > 0{,}524.$$

De même, au lieu de 0,83 nous substituerons l'abscisse 0,698 qui correspond à l'angle de 40° et qui donnera des calculs plus simples à cause des tables. On trouve :

$$f(0{,}698) = +\,0{,}021 \quad \text{donc } x > 0{,}698.$$

Donc en prenant 0,698 nous avons *dépassé la racine vers la gauche* ; le nombre 0,524 devient inutile, car on a :

$$0{,}698 < x < 0{,}83.$$

Nous allons encore remplacer 0,83 par un nombre plus commode pour le calcul de l'ordonnée et plus petit que lui, mais plus grand que 0,698. Pour cela, utilisons la valeur du radian indiquée à la table VI ; essayons par exemple l'arc qui correspond à 44°, lequel est inférieur à 0,83.

Nous remplacerons 0,83 par cet arc correspondant à 44°, soit 0,768, qui donnera des calculs plus simples et qui est plus voisin de la racine. On trouve :

$$f(0{,}768) = -\,0{,}001,$$

par conséquent,

$$0{,}698 < x < 0{,}768.$$

On connaît les ordonnées pour les extrémités de l'intervalle ; il n'y a qu'à recommencer les opérations en utilisant le même

schéma (le point A′ ne sera plus confondu avec le point O, mais ceci est sans importance pour le calcul).

On aura maintenant :

$$A'B' = 0{,}07, \quad AA' = 0{,}021, \quad BB' = 0{,}001 ;$$

on trouve

$$A'M = 0{,}0668,$$
$$B'T = 0{,}0028 ;$$

par suite,

$$0{,}7648 < x < 0{,}7652.$$

L'intervalle d'indétermination est ici 0,0004. On voit qu'en prenant

$$x = 0{,}765,$$

on aura une erreur absolue inférieure à $\frac{2}{10\,000}$.

En continuant ainsi on pourrait évidemment augmenter encore la précision, laquelle est déjà bien supérieure à celle qu'a donnée la solution graphique de l'exemple VI.

Exemple IX. — Soit un fil pesant, de longueur $2l = 10$ m., dont on fixe les extrémités en deux points A et B, situés sur une même horizontale et distants de $2d = 6$ m. Calculer la flèche avec une erreur absolue inférieure à 0.1.

On a vu dans l'exemple IV les formules qui résolvent ce problème et qui sont

$$sh\, x - \frac{5}{3}x = o, \quad a = \frac{3}{x}, \quad \varphi = \sqrt{25 + a^2} - a ;$$

soit ε_x l'erreur commise sur x en résolvant la première équation; cette erreur entraînera dans le calcul de a une erreur systématique qui a pour limite supérieure

$$\varepsilon_x \times \text{Max. de valeur absolue de la dérivée de } \frac{3}{x} ;$$

cette dérivée est $-\frac{3}{x^2}$; d'autre part la résolution grossière faite dans l'exemple IV a montré que $1 < x < 2$.

Donc on prendra comme limite supérieure

$$\varepsilon_x \times 3.$$

En outre, la division $\frac{3}{x}$ entraînera une erreur de calcul α ;

donc

$$\varepsilon_a < 3\,\varepsilon_x + \alpha.$$

Cette erreur sur a entraîne à son tour une erreur systématique sur la flèche φ ; or,

$$\varphi'(a) = \frac{a}{\sqrt{25 + a^2}} - 1,$$

et on a vu que $\frac{3}{2} < a < 3$; on en déduit :

$$\text{Max. de } |\varphi'(a)| < 1 + \frac{6}{\sqrt{109}} < 2.$$

Donc, l'erreur systématique sur φ sera inférieure à $2\,\varepsilon_a$; il y aura d'autre part une erreur de calcul dans l'extraction de la racine carrée : appelons-la β ; finalement, l'erreur commise sur la flèche sera inférieure à

$$2\,\varepsilon_a + \beta < 6\,\varepsilon_x + 2\,\alpha + \beta.$$

Il faut donc, en définitive :

$$6\,\varepsilon_x + 2\,\alpha + \beta < \frac{1}{10}.$$

Nous calculerons x de manière que $6\,\varepsilon_x < \frac{1}{30}$, soit

$$\varepsilon_x < \frac{1}{180}.$$

Calcul de x. — Il faut résoudre l'équation

$$y = sh\,x - \frac{5}{3}\,x = 0.$$

On a vu qu'elle n'admettait qu'une racine positive (les négatives sont à rejeter), qui est séparée dans l'intervalle (1, 2). On a ici :

$$y' = ch\,x - \frac{5}{3},$$

$$y'' = sh\,x > 0.$$

Le schéma sera donc celui de la fig. 30, à laquelle il n'y a qu'à se reporter. On calcule les ordonnées au moyen de la table IX, à la fin du volume.

Dans la première opération l'intervalle étant égal à 1, on fera les calculs avec 2 décimales ; on trouve ainsi :

$$f(1) = -0{,}49, \quad f(2) = +0{,}29, \quad f'(2) = 2{,}09.$$

D'où :

$$A'M = \frac{0{,}49}{0{,}78} = 0{,}62\ldots, \quad B'T = \frac{0{,}29}{2{,}09} = 0{,}13\ldots$$

On en déduit :

$$1{,}62 < x < 1{,}87.$$

Nous ne substituerons pas 1,62 mais plutôt 1,7 qui est à droite ; on trouve :

$$f(1{,}7) = -0{,}188, \quad \text{donc } x > 1{,}7.$$

De même nous ne substituerons pas 1,87 mais plutôt 1,8 qui est plus à gauche ; on trouve :

$$f(1{,}8) = -0{,}058, \quad \text{donc } x > 1{,}8.$$

Par conséquent, en prenant 1,8 nous avons dépassé la racine vers la gauche, et nous avons :

$$1{,}8 < x < 1{,}87.$$

Nos tables ne donneraient *sh* (1,87) qu'au moyen d'une interpolation ; il sera plus rapide ici de prendre

$$1{,}8 < x < 1{,}9,$$

et de recommencer les opérations dans ce nouvel intervalle. On a :

$$f(1{,}8) = -0{,}058, \quad f(1{,}9) = +0{,}102, \quad f'(1{,}9) = 1{,}751.$$

Le schéma est toujours celui de la fig. 30, avec

$$A'B' = 0{,}1, \quad AA' = 0{,}058, \quad BB' = 0{,}102.$$

On en tire :

$$A'M = 0{,}1 \times \frac{0{,}058}{0{,}160} = 0{,}036,$$

$$B'T = \frac{0{,}102}{1{,}751} = 0{,}058.$$

Par suite, $$1{,}836 < x < 1{,}842.$$

En prenant $x = 1{,}84$, on aura $\varepsilon_x < \frac{4}{1000}$ inférieur à $\frac{1}{180}$.

Le calcul donne alors :

$$a = \frac{3}{1{,}84} = 1{,}63, \text{ avec } \alpha < \frac{1}{100},$$

$$\varphi = \sqrt{25 + (1{,}63)^2} - 1{,}63 = 5{,}25 - 1{,}63 = 3{,}62, \text{ avec } \beta < \frac{1}{100}.$$

Si dans ce résultat nous supprimons la dernière décimale, nous commettons une nouvelle erreur de $\frac{2}{100}$, et l'erreur totale sera ainsi inférieure à

$$6\,\varepsilon_x + 2\,\alpha + \beta + \frac{2}{100} < \frac{24}{1000} + \frac{2}{100} + \frac{1}{100} + \frac{2}{100} = \frac{74}{1000}.$$

Or $\frac{74}{1000} < \frac{1}{10}$; par conséquent nous pouvons donner en réponse à la question posée :

$$\varphi = 3{,}6.$$

57. Approximations successives par itération. — Considérons une fonction quelconque $\varphi(x)$ et donnons à x la valeur x_0 ; elle prend une certaine valeur que nous désignerons par $x_1 = \varphi(x_0)$; si nous faisons $x = x_1$, on aura $x_2 = \varphi(x_1)$; puis $x_3 = \varphi(x_2)$ et ainsi de suite. On désigne par le nom d'*itération* la suite de ces opérations ; les diverses quantités, $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, etc., sont dites *valeurs itérées de* la fonction.

Cela posé, remaqruons que toute équation peut se mettre sous la forme $x = \varphi(x)$, et même en général de beaucoup de manières ; supposons qu'on ait séparé une racine de cette équation dans l'intervalle (a, b) ; soit α cette racine.

Prenons une valeur quelconque x_0 dans l'intervalle (a, b) et formons la suite des valeurs itérées :

$$x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1),\ x_3 = \varphi(x_2),\ \ldots,\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ \ldots$$

il y a des cas où cette suite tend vers une limite, qui est précisément la racine cherchée α. Nous ne pouvons pas faire ici l'étude générale de cette question : nous nous bornerons à signaler deux cas particuliers où on peut apercevoir facilement l'existence de la limite.

Premier cas. — On a $0 < \varphi'(x) < 1$ pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a, b).

Etudions alors ce qui se passe pour la première itération : on a : $x_1 = \varphi(x_0)$; d'autre part, $\alpha = \varphi(\alpha)$. Donc, d'après le théorème des accroissements finis :

$$x_1 - \alpha = \varphi(x_0) - \varphi(\alpha) = (x_0 - \alpha)\ \varphi'(\xi)\ ;$$

ξ étant un nombre compris entre α et x_0, sera dans l'intervalle (a, b) et par suite $\varphi'(\xi)$ est compris entre 0 et 1. Donc : $0 < \frac{x_1 - \alpha}{x_0 - \alpha} < 1$. On en déduit immédiatement

que x_1 est compris entre x_0 et α ; le même raisonnement montre que x_2 est compris entre x_1 et α et ainsi de suite. Par conséquent, si $x_0 > \alpha$, la suite x_0, x_1, x_2..., est décroissante et bornée inférieurement par α.

Si $x_0 < \alpha$, la suite est croissante et bornée supérieurement par α.

Dans les deux cas on sait que les nombres x_1, x_2... tendent vers une certaine limite l ; la représentation graphique de ces nombres sur un axe montre d'ailleurs l'existence de cette limite dans chacun des deux cas.

Or puisque, en prenant n assez grand, x_n et x_{n-1} sont aussi voisins qu'on le veut de la limite l, l'égalité $x_n = \varphi(x_{n-1})$ devient donc à la limite $l = \varphi(l)$, ce qui prouve que l n'est autre que α.

On voit, dans ce cas, qu'en partant d'une valeur approchée quelconque x_0 dans l'intervalle (a,b), la suite des itérations donnera des nombres de plus en plus approchés de la racine. On pourra faire par exemple deux suites d'itérations, l'une en partant de a qui donnera des valeurs approchées par défaut croissantes, l'autre en partant de b qui donnera des valeurs approchées par excès décroissantes : on pourra ainsi calculer la racine avec telle approximation que l'on voudra.

Deuxième cas. — On a $-1 < \varphi'(x) < 0$ pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (a, b).

La formule des accroissements finis, écrite ci-dessus, montre alors que $-1 < \dfrac{x_1 - \alpha}{x_0 - \alpha} < 0$. Donc $(x_1 - \alpha)$ est inférieur à $(x_0 - \alpha)$ en valeur absolue, mais de signe contraire ; la représentation graphique montre alors que x_1 est plus près de α que x_0, mais de l'autre côté que x_0. On en déduit que la suite

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

tend vers la racine α, mais *en oscillant*, les termes de

cette suite étant alternativement supérieurs et inférieurs à α. La racine α est donc comprise entre deux termes consécutifs quelconques de cette suite ; on peut ainsi la calculer avec une précision aussi grande qu'on le veut.

Remarque. — Les conclusions ci-dessus ne s'appliquent rigoureusement que dans l'hypothèse où les calculs des valeurs itérées sont faits exactement. Dans la pratique, il est impossible d'éviter les erreurs de calcul dans ces opérations ; on se contente alors de faire tous les calculs avec deux décimales de plus que n'en comporte l'approximation désirée pour le résultat. Ainsi que nous l'avons fait remarquer (voir § 29, p. 59), cette manière de faire n'est pas absolument sûre ; on ne peut avoir de certitude qu'en évaluant les erreurs, ou bien en s'astreignant à calculer par défaut toutes les valeurs inférieures à α et par excès toutes les valeurs supérieures. Mais cela est très long, et si le nombre des opérations n'est pas très grand, la règle empirique des deux décimales supplémentaires suffit largement dans la pratique.

Exemple. — Soit l'équation du second degré

$$x^2 - 7{,}233\,x - 1{,}326 = 0.$$

Quelques substitutions de nombres entiers montrent immédiatement qu'elle admet deux racines, séparées dans les intervalles (—1,0) et (7,8).

Calculons d'abord la racine négative et proposons-nous de l'obtenir à $\frac{1}{100}$ près ; pour cela écrivons l'équation

$$x = \frac{x^2 - 1{,}326}{7{,}233} = \varphi(x), \quad \varphi'(x) = \frac{2\,x}{7{,}233}.$$

Dans l'intervalle (—1,0), on a évidemment $-1 < \varphi'(x) < 0$; on est donc dans le second cas particulier étudié ci-dessus.

Formons la suite des valeurs itérées en partant de 0 : nous savons que ces valeurs seront approchées alternativement par excès et par défaut ; nous ferons les calculs avec 4 décimales

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = \varphi(0) = -\frac{1{,}326}{7{,}233} = -0{,}1833.$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \frac{(0{,}1833)^2 - 1{,}326}{7{,}233} = -0{,}1787.$$

La racine étant comprise entre x_1 et x_2, l'intervalle d'indétermination a pour longueur 0,1833 — 0,1787 = 0,0046 ; donc nous avons la précision demandée. Nous prendrons le nombre le plus simple de l'intervalle, qui est —0,18, dont la distance à l'extrémité la plus éloignée est égale à 0,0033. Donc

$$\alpha_1 = -0{,}18 \qquad \text{erreur} < 0{,}004.$$

Calculons maintenant la racine positive ; lorsque x varie de 7 à 8, la dérivée $\varphi'(x)$ est ici supérieure à l'unité et la théorie indiquée ne s'applique plus. Mais écrivons l'équation donnée sous la forme

$$x = \frac{7{,}233\,x + 1{,}326}{x} = 7{,}233 + \frac{1{,}326}{x} = \varphi(x) ;$$

ici :

$$\varphi'(x) = -\frac{1{,}326}{x^2}.$$

Il est clair que cette dérivée reste comprise entre — 1 et 0, quand x varie entre 7 et 8 ; nous sommes donc encore dans le deuxième cas particulier ; formons la suite des valeurs itérées en partant de $x_0 = 7$, et faisons les calculs avec 4 décimales :

$$x_0 = 7, \quad x_1 = 7{,}233 + \frac{1{,}326}{7} = 7{,}4224,$$

$$x_2 = 7{,}233 + \frac{1{,}326}{7{,}4224} = 7{,}4116.$$

La racine α_2 est comprise entre x_1 et x_2 ; en prenant le nombre le plus simple de cet intervalle, $\alpha_2 = 7{,}42$, on voit que l'erreur sera inférieure à $0{,}0084 < 0{,}01$. Donc on peut écrire :

$$\alpha_2 = 7{,}42 \quad \text{erreur} < 0{,}009.$$

Pour chaque racine il a suffi de deux itérations.

Ainsi que nous l'avons fait remarquer, cette méthode s'étend bien au delà des cas particuliers que nous avons envisagés, mais elle devient alors d'une application délicate. Elle s'étend même à d'autres problèmes, comme par exemple l'intégration des équations différentielles (1).

(1) On pourra consulter à ce sujet le *Traité d'analyse* de M. E. Picard.

58. Méthodes particulières à l'équation du troisième degré. — Toute équation du 3e degré :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

peut se ramener à la forme trinome ; posons en effet

$$x = x' - \frac{a}{3} ;$$

il vient :

$$x'^3 + x'\left(b - \frac{a^2}{3}\right) + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0,$$

qui est de la forme trinome.

Il suffit donc de savoir résoudre l'équation

$$x^3 + px + q = 0. \tag{53}$$

Nous avons déjà indiqué deux méthodes graphiques pour résoudre cette équation (voir § 33 et § 54, ex. III).

Naturellement, les méthodes générales d'approximation, soit graphiques, soit numériques, pourront aussi être employées. Nous allons indiquer ici des formules qui donnent les valeurs exactes des racines. Rappelons que l'équation (53) admet 1 ou 3 racines réelles, suivant que $4p^3 + 27q^2$ est positif ou négatif. Elle a une racine double, réelle, si cette quantité est nulle. La courbe $y = x^3 + px + q$ montre immédiatement ces résultats.

1° *Résolution algébrique.* — Rappelons ici cette méthode, pour mémoire : elle est dans la pratique d'un emploi incommode et on ne l'utilise guère.

Posons

$$x = u + v,$$

u et v étant reliés par la relation $uv = -\frac{p}{3}$.

L'équation (53) se réduit alors à

$$u^3 + v^3 = -q,$$

de telle sorte qu'on connaît u^3 et v^3 par les deux équations

$$u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} ;$$

u^3 et v^3 sont donc les racines de la *résolvante*

$$M^2 + qM - \frac{p^3}{27} = 0.$$

De cette équation on peut tirer u^3 et v^3 et par suite x qui est égal à $u + v$. Pour que la résolution soit complète, il faut faire intervenir la théorie des nombres imaginaires.

2° *Résolution trigonométrique.* — Ce mode de résolution est très commode, lorsque $4p^3 + 27q^2 < 0$, c'est-à-dire quand l'équation a ses 3 racines réelles. Nous ne l'exposerons que dans ce cas.

On sait que $\cos a = 4\cos^3\frac{a}{3} - 3\cos\frac{a}{3}$.

Or, si nous posons $x = \lambda\cos\frac{a}{3}$, l'équation (53) s'écrit

$$\lambda^3\cos^3\frac{a}{3} + p\lambda\cos\frac{a}{3} + q = 0 ;$$

elle est identique à la formule précédente si

$$\lambda^2 = -\frac{4}{3}p \quad \text{et} \quad \cos a = -\frac{4q}{\lambda^3} ;$$

or il est possible de choisir a et λ de manière qu'il en soit ainsi ; en effet, puisque $4p^3 + 27q^2 < 0$, c'est que $p < 0$; donc on peut prendre

$$\lambda = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

On aura alors :

$$\cos a = \frac{-q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}} ;$$

l'angle a sera donné par les tables, puisque la valeur de $\cos a$ est inférieure à 1 en valeur absolue. Cet angle a étant connu, les angles $a + 360°$ et $a + 720°$ ont même cosinus ; on aura donc les 3 racines

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{a}{3},$$

$$x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{a}{3} + 120^\circ\right),$$

$$x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{a}{3} + 240^\circ\right).$$

3° *Résolution par les fonctions hyperboliques.* — Nous emploierons les fonctions hyperboliques lorsque $4p^3 + 27q^2 > 0$, c'est-à-dire quand l'équation (53) n'aura qu'une racine réelle. On sait que

$$sh\,a = 4\left(sh\,\frac{a}{3}\right)^3 + 3\,sh\,\frac{a}{3}, \tag{54}$$

$$ch\,a = 4\left(ch\,\frac{a}{3}\right)^3 - 3\,ch\,\frac{a}{3}. \tag{55}$$

1er *cas* : $p > 0$. — Posons

$$x = \lambda\,sh\,\frac{a}{3};$$

l'équation (53) devient identique à (54), à condition de prendre

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad sh\,a = -\frac{3q}{p\lambda},$$

ce qui est toujours possible.

On calculera donc a au moyen des tables IX, par suite on connaîtra $\frac{a}{3}$ et on en déduira x.

2e *cas* : $p < 0$. — Posons

$$x = \lambda\,ch\,\frac{a}{3};$$

l'équation (53) devient identique à (55), à condition de prendre

$$\lambda = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \quad ch\,a = \frac{3q}{p\lambda};$$

cela n'est possible que si la valeur du cosinus est supérieure à l'unité ; mais on peut d'abord choisir le signe de λ de manière qu'elle soit positive. Dans ces conditions, on aura certainement :

$$\left|\frac{3q}{p\lambda}\right| > 1 \qquad \text{car} \quad 9q^2 > p^2\lambda^2 = -\frac{4p^3}{3},$$

c'est-à-dire $4p^3 + 27q^2 > 0$, ce qui est exact.

On calculera donc a par les tables IX ; on en déduira $\frac{a}{3}$ et par suite x.

Remarque. — Les méthodes exposées dans ce paragraphe donnent des valeurs théoriquement exactes pour les racines, mais les calculs numériques entraîneront des erreurs, d'autant plus que la précision des tables dont on se sert est limitée.

TABLE I

Puissances et Logarithmes népériens

Usage. — Cette table ne comprend que les nombres de 1 à 100 ; si un nombre est supérieur à 100, on utilisera la table en le décomposant, suivant les cas, en une somme, un produit ou un quotient de plusieurs autres, lesquels seraient inférieurs à 100.

Exemples. — *Cube* : Soit à calculer $(234)^3$; on écrit : $(234)^3 = (200+34)^3 = (200)^3 + 3.(200)^2.34 + 3.200.34^2 + 34^3$; la table permet de calculer très facilement ce résultat.

Racine carrée. — Soit $\sqrt[2]{713}$; on mettra en facteur un nombre carré parfait, 9 par exemple. On a $713 = 9 \times 79{,}22\ldots$. D'où $\sqrt{713} = 3 \times \sqrt{79{,}22\ldots}$; cette dernière racine s'obtient par la table, en interpolant.

Racine cubique. — On opère de même, en mettant en facteur un nombre cube parfait (8,27, etc.).

Nombre inverse. — Soit à calculer $\frac{1}{237}$; on écrira, par exemple, $\frac{1}{237} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{23{,}7}$. La table donne $\frac{1000}{23{,}7}$ au moyen d'une interpolation : il faut diviser ce résultat par 10 000 pour avoir le nombre cherché.

Logarithme. — Soit à calculer Log 321 ; on écrit

$$\text{Log } 321 = \text{Log } 10 + \text{Log } 32{,}1.$$

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \times \frac{1}{n}$	*Log. népér. n*
1	1	1	1,0000	1,0000	1000,000	0,00000
2	4	8	1,4142	1,2599	500,000	0,69315
3	9	27	1,7321	1,4422	333,333	1,09861
4	16	64	2,0000	1,5874	250,000	1,38629
5	25	125	2,2361	1,7100	200,000	1,60944
6	36	216	2,4495	1,8171	166,667	1,79176
7	49	343	2,6458	1,9129	142,857	1,94591
8	64	512	2,8284	2,0000	125,000	2,07944
9	81	729	3,0000	2,0801	111,111	2,19722
10	100	1000	3,1623	2,1544	100,000	2,30259
11	121	1331	3,3166	2,2240	90,9091	2,39790
12	144	1728	3,4641	2,2894	83,3333	2,48491
13	169	2197	3,6056	2,3513	76,9231	2,56495
14	196	2744	3,7417	2,4101	71,4286	2,63906
15	225	3375	3,8730	2,4662	66,6667	2,70805
16	256	4096	4,0000	2,5198	62,5000	2,77259
17	289	4913	4,1231	2,5713	58,8235	2,83321
18	324	5832	4,2426	2,6207	55,5556	2,89037
19	361	6859	4,3589	2,6684	52,6316	2,94444
20	400	8000	4,4721	2,7144	50,0000	2,99573
21	441	9261	4,5826	2,7589	47,6190	3,04452
22	484	10648	4,6904	2,8020	45,4545	3,09104
23	529	12167	4,7958	2,8439	43,4783	3,13549
24	576	13824	4,8990	2,8845	41,6667	3,17805
25	625	15625	5,0000	2,9240	40,0000	3,21888
26	676	17576	5,0990	2,9625	38,4615	3,25810
27	729	19683	5,1962	3,0000	37,0370	3,29584
28	784	21952	5,2915	3,0366	35,7143	3,33220
29	841	24389	5,3852	3,0723	34,4828	3,36730
30	900	27000	5,4772	3,1072	33,3333	3,40120
31	961	29791	5,5678	3,1414	32,2581	3,43399
32	1024	32768	5,6569	3,1748	31,2500	3,46574
33	1089	35937	5,7446	3,2075	30,3030	3,49651
34	1156	39304	5,8310	3,2396	29,4118	3,52636
35	1225	42875	5,9161	3,2711	28,5714	3,55535

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \times \frac{1}{n}$	*Log. népér. n*
36	1296	46656	6,0000	3,3019	27,7778	3,58352
37	1369	50683	6,0828	3,3322	27,0270	3,61092
38	1444	54872	6,1644	3,3620	26,3158	3,63759
39	1521	59319	6,2450	3,3912	25,6410	3,66356
40	1600	64000	6,3246	3,4200	25,0000	3,68888
41	1681	68921	6,4031	3,4482	24,3902	3,71357
42	1764	74088	6,4807	3,4760	23,8095	3,73767
43	1849	79507	6,5574	3,5034	23,2558	3,76120
44	1936	85184	6,6332	3,5303	22,7273	3,78419
45	2025	91125	6,7082	3,5569	22,2222	3,80666
46	2116	97336	6,7823	3,5830	21,7391	3,82864
47	2209	103823	6,8557	3,6088	21,2766	3,85015
48	2304	110592	6,9282	3,6342	20,8333	3,87120
49	2401	117649	7,0000	3,6593	20,4082	3,89182
50	2500	125000	7,0711	3,6840	20,0000	3,91202
51	2601	132651	7,1414	3,7084	19,6078	3,93183
52	2704	140608	7,2111	3,7325	19,2308	3,95124
53	2809	148877	7,2801	3,7563	18,8679	3,97029
54	2916	157464	7,3485	3,7798	18,5185	3,98898
55	3025	166375	7,4162	3,8030	18,1818	4,00733
56	3136	175616	7,4833	3,8259	17,8571	4,02535
57	3249	185193	7,5498	3,8485	17,5439	4,04305
58	3364	195112	7,6158	3,8709	17,2414	4,06044
59	3481	205379	7,6811	3,8930	16,9492	4,07754
60	3600	216000	7,7460	3,9149	16,6667	4,09434
61	3721	226981	7,8102	3,9365	16,3934	4,11087
62	3844	238328	7,8740	3,9579	16,1290	4,12713
63	3969	250047	7,9373	3,9791	15,8730	4,14313
64	4096	262144	8,0000	4,0000	15,6250	4,15888
65	4225	274625	8,0623	4,0207	15,3846	4,17439
66	4356	287496	8,1240	4,0412	15,1515	4,18965
67	4489	300763	8,1854	4,0615	14,9254	4,20469
68	4624	314432	8,2462	4,0817	14,7059	4,21951
69	4761	328509	8,3066	4,1016	14,4928	4,23411
70	4900	343000	8,3666	4,1213	14,2857	4,24850

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1000 \times \frac{1}{n}$	*Log. népér. n*
71	5041	357911	8,4261	4,1408	14,0845	4,26268
72	5184	373248	8,4853	4,1602	13,8889	4,27667
73	5329	389017	8,5440	4,1793	13,6986	4,29046
74	5476	405224	8,6023	4,1983	13,5135	4,30407
75	5625	421875	8,6603	4,2172	13,3333	4,31749
76	5776	438976	8,7178	4,2358	13,1579	4,33073
77	5929	456533	8,7750	4,2543	12,9870	4,34381
78	6084	474552	8,8318	4,2727	12,8205	4,35671
79	6241	493039	8,8882	4,2908	12,6582	4,36945
80	6400	512000	8,9443	4,3089	12,5000	4,38203
81	6561	531441	9,0000	4,3267	12,3457	4,39445
82	6724	551368	9,0554	4,3445	12,1951	4,40672
83	6889	571787	9,1104	4,3621	12,0482	4,41884
84	7056	592704	9,1652	4,3795	11,9048	4,43082
85	7225	614125	9,2195	4,3968	11,7647	4,44265
86	7396	636056	9,2736	4,4140	11,6279	4,45435
87	7569	658503	9,3274	4,4310	11,4943	4,46591
88	7744	681472	9,3808	4,4480	11,3636	4,47734
89	7921	704969	9,4340	4,4647	11,2360	4,48864
90	8100	729000	9,4868	4,4814	11,1111	4,49981
91	8281	753571	9,5394	4,4979	10,9890	4,51086
92	8464	778688	9,5917	4,5144	10,8696	4,52179
93	8649	804357	9,6437	4,5307	10,7527	4,53260
94	8836	830584	9,6954	4,5468	10,6383	4,54329
95	9025	857375	9,7468	4,5629	10,5263	4,55388
96	9216	884736	9,7980	4,5789	10,4167	4,56435
97	9409	912673	9,8489	4,5947	10,3093	4,57471
98	9604	941192	9,8995	4,6104	10,2041	4,58497
99	9801	970299	9,9499	4,6261	10,1010	4,59512
100				4,6416	10,0000	4,60517

TABLE II

Sinus naturels, de 10′ en 10′

La partie décimale seule est écrite, la partie entière étant 0. Si l'angle est supérieur à 45°, on prend le cosinus de son complément au moyen de la table III.

Degrés	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,00000	00291	00582	00873	01164	01454
1	01745	02036	02327	02618	02908	03199
2	03490	03781	04071	04362	04653	04943
3	05234	05524	05814	06105	06395	06685
4	06976	07266	07556	07846	08136	08426
5	08716	09005	09295	09585	09874	10164
6	10453	10742	11031	11320	11609	11898
7	12187	12476	12764	13053	13341	13629
8	13917	14205	14493	14781	15069	15356
9	15643	15931	16218	16505	16792	17078
10	17365	17651	17937	18224	18509	18795
11	19081	19366	19652	19937	20222	20507
12	20791	21076	21360	21644	21928	22212
13	22495	22778	23062	23345	23627	23910
14	24192	24474	24756	25038	25320	25601
15	25882	26163	26443	26724	27004	27284
16	27564	27843	28123	28402	28680	28959
17	29237	29515	29793	30071	30348	30625
18	30902	31178	31454	31730	32006	32282
19	32557	32832	33106	33381	33655	33929

Degrés	0′	10′	20′	30′	40′	50′
20	0,34202	34475	34748	35021	35293	35565
21	35837	36108	36379	36650	36921	37191
22	37461	37730	37999	38268	38537	38805
23	39073	39341	39608	39875	40141	40408
24	40674	40939	41204	41469	41734	41998
25	42262	42525	42788	43051	43313	43575
26	43837	44098	44359	44620	44880	45140
27	45399	45658	45917	46175	46433	46690
28	46947	47204	47460	47716	47971	48226
29	48481	48735	48989	49242	49495	49748
30	50000	50252	50503	50754	51004	51254
31	51504	51753	52002	52250	52498	52745
32	52992	53238	53484	53730	53975	54220
33	54464	54708	54951	55194	55436	55678
34	55919	56160	56401	56641	56880	57119
35	57358	57596	57833	58070	58307	58543
36	58779	59014	59248	59482	59716	59949
37	60182	60414	60645	60876	61107	61337
38	61566	61795	62024	62251	62479	62706
39	62932	63158	63383	63608	63832	64056
40	64279	64501	64723	64945	65166	65386
41	65606	65825	66044	66262	66480	66697
42	66913	67129	67344	67559	67773	67987
43	68200	68412	68624	68835	69046	69256
44	69466	69675	69883	70091	70298	70505
45	70711					

TABLE III

Cosinus naturels, de 10′ en 10′

La partie décimale seule est écrite, la partie entière étant 0. Si l'angle est supérieur à 45°, on prend le sinus de son complément au moyen de la table II.

Degrés	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	1,00000	00000	99998	99996	99993	99989
1	0,99985	99979	99973	99966	99958	99949
2	99939	99929	99917	99905	99892	99878
3	99863	99847	99831	99813	99795	99776
4	99756	99736	99714	99692	99668	99644
5	99619	99594	99567	99540	99511	99482
6	99452	99421	99390	99357	99324	99290
7	99255	99219	99182	99144	99106	99067
8	99027	98986	98944	98902	98858	98814
9	98769	98723	98676	98629	98580	98531
10	98481	98430	98378	98325	98272	98218
11	98163	98107	98050	97992	97934	97875
12	97815	97754	97692	97630	97566	97502
13	97437	97371	97304	97237	97169	97100
14	97030	96959	96887	96815	96742	96667
15	96593	96517	96440	96363	96285	96206
16	96126	96046	95964	95882	95799	95715
17	95630	95545	95459	95372	95284	95195
18	95106	95015	94924	94832	94740	94646
19	94552	94457	94361	94264	94167	94068

Degrés	0′	10′	20′	30′	40′	50′
20	0,93969	93869	93769	93667	93565	93462
21	93358	93253	93148	93042	92935	92827
22	92718	92609	92499	92388	92276	92164
23	92050	91936	91822	91706	91590	91472
24	91355	91236	91116	90996	90875	90753
25	90631	90507	90383	90259	90133	90007
26	89879	89752	89623	89493	89363	89232
27	89101	88968	88835	88701	88566	88431
28	88295	88158	88020	87882	87743	87603
29	87462	87321	87178	87036	86892	86748
30	86603	86457	86310	86163	86015	85866
31	85717	85567	85416	85264	85112	84959
32	84805	84650	84495	84339	84182	84025
33	83867	83708	83549	83389	83228	83066
34	82904	82741	82577	82413	82248	82082
35	81915	81748	81580	81412	81242	81072
36	80902	80730	80558	80386	80212	80038
37	79864	79688	79512	79335	79158	78980
38	78801	78622	78442	78261	78079	77897
39	77715	77531	77347	77162	76977	76791
40	76604	76417	76229	76041	75851	75661
41	75471	75280	75088	74896	74703	74509
42	74314	74120	73924	73728	73531	73333
43	73135	72937	72737	72537	72337	72136
44	71934	71732	71529	71325	71121	70916
45	70711					

TABLE IV

Tangentes naturelles, de 10′ en 10′

La partie décimale seule est écrite, la partie entière étant 0. Si l'angle est supérieur à 45°, on prend la cotangente de son complément au moyen de la table V.

Degrés	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,00000	00291	00582	00873	01164	01455
1	01746	02036	02328	02619	02910	03201
2	03492	03783	04075	04366	04658	04949
3	05241	05533	05824	06116	06408	06700
4	06993	07285	07578	07870	08163	08456
5	08749	09042	09335	09629	09923	10216
6	10510	10805	11099	11394	11688	11983
7	12278	12574	12869	13165	13461	13758
8	14054	14351	14648	14945	15243	15540
9	15838	16137	16435	16734	17033	17333
10	17633	17933	18233	18534	18835	19136
11	19438	19740	20042	20345	20648	20952
12	21256	21560	21864	22169	22475	22781
13	23087	23393	23700	24008	24316	24624
14	24933	25242	25552	25862	26172	26483
15	26795	27107	27419	27732	28046	28360
16	28675	28990	29305	29621	29938	30255
17	30573	30891	31210	31530	31850	32171
18	32492	32814	33136	33460	33783	34108
19	34433	34758	35085	35412	35740	36068

Degrès	0′	10′	20′	30′	40′	50′
20	0,36397	36727	37057	37388	37720	38053
21	38386	38721	39055	39391	39727	40065
22	40403	40741	41081	41421	41763	42105
23	42447	42791	43136	43481	43828	44175
24	44523	44872	45222	45573	45924	46277
25	46631	46985	47341	47698	48055	48414
26	48773	49134	49495	49858	50222	50587
27	50953	51319	51688	52057	52427	52798
28	53171	53545	53920	54296	54673	55051
29	55431	55812	56194	56577	56962	57348
30	57735	58124	58513	58905	59297	59691
31	60086	60483	60881	61280	61681	62083
32	62487	62892	63299	63707	64117	64528
33	64941	65355	65771	66189	66608	67028
34	67451	67875	68301	68728	69157	69588
35	70021	70455	70891	71329	71769	72211
36	72654	73100	73547	73996	74447	74900
37	75355	75812	76272	76733	77196	77661
38	78129	78598	79070	79544	80020	80498
39	80978	81461	81946	82434	82923	83415
40	83910	84407	84906	85408	85912	86419
41	86929	87441	87955	88473	88992	89515
42	90040	90569	91099	91633	92170	92709
43	93252	93797	94345	94896	95451	96008
44	96569	97133	97700	98270	98843	99420
45	1,00000					

TABLE V

Cotangentes naturelles, de 10′ en 10′

Si l'angle est supérieur à 45°, on prend la tangente de son complément, au moyen de la table IV.

Degrés	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	∞	343,7737	171,8854	114,5887	85,9398	68,7501
1	57,2810	49,1039	42,9641	38,1885	34,3678	31,2416
2	28,6363	26,4316	24,5418	22,9038	21,4704	20,2056
3	19,0811	18,0750	17,1693	16,3499	15,6048	14,9244
4	14,3007	13,7267	13,1969	12,7062	12,2505	11,8262
5	11,4301	11,0594	10,7119	10,3854	10,0780	9,78817
6	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496
7	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873
8	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484
9	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937
10	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566
11	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286
12	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969
13	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107
14	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595
15	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609
16	3,48741	3,44951	3,41236	3,37594	3,34023	3,30521
17	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842
18	3,07768	3,04749	3,01783	2,98868	2,96004	2,93189
19	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254

Degrés	0′	10′	20′	30′	40′	50′
20	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791
21	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597
22	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504
23	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374
24	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090
25	2,14451	2,12832	2,11233	2,09654	2,08094	2,06553
26	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680
27	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400
28	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649
29	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375
30	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530
31	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074
32	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972
33	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190
34	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703
35	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484
36	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511
37	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764
38	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227
39	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882
40	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,16398	1,15715
41	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713
42	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864
43	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158
44	1,03553	1,02952	1,02355	1,01761	1,01170	1,00583
45	1,00000					

TABLE VI

Transformation des degrés en radians

Degrés			Minutes			Secondes		
1°	0,017	4533	1′	0,000	2909	1″	0,000	0048
2°	0,034	9066	2′	0,000	5818	2″	0,000	0097
3°	0,052	3599	3′	0,000	8727	3″	0,000	0145
4°	0,069	8132	4′	0,001	1636	4″	0,000	0194
5°	0,087	2665	5′	0,001	4544	5″	0,000	0242
6°	0,104	7198	6′	0,001	7453	6″	0,000	0291
7°	0,122	1730	7′	0,002	0362	7″	0,000	0339
8°	0,139	6263	8′	0,002	3271	8″	0,000	0388
9°	0,157	0796	9′	0,002	6180	9″	0,000	0436
10°	0,174	5329	10′	0,002	9089	10″	0,000	0485

Transformation inverse des radians en degrés :

On a 1 radian $= \frac{180}{\pi}$ degrés $= 57{,}295780$ degrés

ou 1 radian $= 57° 17′ 44″, 81.$

TABLE VII

Nombres usuels π et g

$\pi = 3{,}141\ 593$	$\sqrt{\pi} = 1{,}772\ 454$	$g = 9{,}80943$
$\pi^2 = 9{,}869\ 604$	$\sqrt{2\pi} = 2{,}506\ 628$	$g^2 = 96{,}225$
$\pi^3 = 31{,}00\ 628$	$\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}564\ 190$	$\frac{1}{g} = 0{,}10194$
$\pi^4 = 97{,}40\ 909$		$\frac{1}{g^2} = 0{,}01039$
$\pi^5 = 306{,}0\ 197$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}797\ 885$	$\sqrt{g} = 3{,}13200$
$\frac{1}{\pi} = 0{,}318\ 310$	$\pi\sqrt{2} = 4{,}442\ 882$	$\frac{1}{\sqrt{g}} = 0{,}31928$
$\frac{1}{\pi^2} = 0{,}101\ 321$	$\pi\sqrt{\pi} = 5{,}568\ 328$	$\pi\sqrt{g} = 9{,}8395$
$\frac{1}{\pi^3} = 0{,}032\ 252$	$\frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} = 0{,}179\ 594$	$\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1{,}00306$
$\frac{1}{\pi^4} = 0{,}010\ 266$	$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}464\ 592$	$\log \pi = 0{,}49715$
$\frac{1}{\pi^5} = 0{,}003\ 268$	$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0{,}682\ 784$	$\log g = 0{,}99178$

TABLE VIII

Intégrales usuelles

$$\int x_n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C \quad \left\{ \begin{array}{l} n \text{ quelconque (entier ou non, positif} \\ \text{ou négatif), mais différent de } -1. \end{array} \right.$$

$$\int x^{-1}\,dx = \operatorname{Log}|Cx|, \qquad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\operatorname{Log}|\,C\,(ax+b)\,|,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg}\,x + C, \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\,C\,\frac{1+x}{1-x}\right|,$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+2\,bx+c} \left\{ \begin{array}{l} = \dfrac{1}{2\sqrt{b^2-ac}}\operatorname{Log}\dfrac{\sqrt{b^2-ac}-b-ax}{\sqrt{b^2-ac}+b+ax} + C, \\ \qquad \text{si } b^2-ac > 0 \\ = \dfrac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b+ax}{\sqrt{ac-b^2}} + C, \\ \qquad \text{si } b^2-ac < 0 \\ = -\dfrac{1}{b+ax} + C, \quad \text{si } b^2-ac = 0. \end{array} \right.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \operatorname{Log}|C\,(x+\sqrt{x^2+k})|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}} \begin{cases} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Log} |b+ax+\sqrt{a(ax^2+2bx+c)}|+C, \\ \qquad \text{si } a > 0 \\ = \dfrac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sin} \dfrac{b+ax}{\sqrt{b^2-ac}} + C, \quad \text{si } a < 0, \end{cases}$$

$$\int \sqrt{ax^2+2bx+c}\, dx =$$
$$\left(\frac{x}{2}+\frac{b}{2a}\right)\sqrt{ax^2+2bx+c}+\frac{ac-b^2}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$I_n = \int \sin^n x\, dx = -\frac{\sin^{n-1}x.\cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$J_n = \int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x.\cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$K_n = \int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{tg^{n-1} x}{n-1} - K_{n-2}$$

(n absolument quelconque positif, négatif entre ou non).

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C, \int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{Log}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

$$\int e^{ax}(A \sin bx + B \cos bx)\, dx =$$
$$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[(Bb + Aa)\sin bx + (Ba - Ab)\cos bx\right] + C.$$

TABLE IX

Fonction exponentielle. Fonctions hyperboliques

x	e^x	e^{-x}	shx	chx	x	e^x
0,1	1,1052	0,90484	0,1002	1,0050	5,1	164,03
0,2	1,2214	0,81873	0,2013	1,0201	5,2	181,27
0,3	1,3499	0,74082	0,3045	1,0453	5,3	200,34
0,4	1,4918	0,67032	0,4108	1,0811	5,4	221,41
0,5	1,6487	0,60653	0,5211	1,1276	5,5	244,69
0,6	1,8221	0,54881	0,6367	1,1855	5,6	270,43
0,7	2,0138	0,49659	0,7586	1,2552	5,7	298,87
0,8	2,2255	0,44933	0,8881	1,3374	5,8	330,30
0,9	2,4596	0,40657	1,0265	1,4331	5,9	365,04
1,0	2,7183	0,36788	1,1752	1,5431	6,0	403.43
1,1	3,0042	0,33287	1,3356	1,6685	6,1	445,86
1,2	3,3201	0,30119	1,5095	1,8107	6,2	492,75
1,3	3,6693	0,27253	1,6984	1,9709	6,3	545,57
1,4	4,0552	0,24660	1,9043	2,1509	6,4	601,85
1,5	4,4817	0,22313	2,1293	2,3524	6,5	665,14
1,6	4,9530	0,20190	2,3756	2,5775	6,6	735,10
1,7	5,4739	0,18268	2,6456	2,8283	6,7	812,41
1,8	6,0496	0,16530	2,9422	3,1075	6,8	897,85
1,9	6,6859	0,14957	3,2682	3,4177	6,9	992,27
2,0	7,3891	0,13534	3,6269	3,7622	7,0	1096,6
2,1	8,1662	0,12246	4,0219	4,1443	7,1	1212,0
2,2	9,0250	0,11080	4,4571	4,5679	7,2	1339,4
2,3	9,9742	0,10026	4,9370	5,0372	7,3	1480,3
2,4	11,0232	0,09073	5,4662	5,5569	7,4	1636,0
2,5	12,1825	0,08208	6,0502	6,1323	7,5	1808,0

x	e^x	e^{-x}	shx	chx	x	e^x
2,6	13,463	0,074274	6,6947	6,7690	7,6	1998,2
2,7	14,880	0,067205	7,4063	7,4735	7,7	2208,3
2,8	16,445	0,060810	8,1919	8,2527	7,8	2440,6
2,9	18,174	0,055023	9,0596	9,1146	7,9	2697,3
3,0	20,086	0,049787	10,018	10,068	8,0	2981,0
3,1	22,198	0,045049	11,076	11,121	8,1	3984,5
3,2	24,533	0,040762	12,246	12,287	8,2	3641,0
3,3	27,113	0,036883	13,538	13,575	8,3	4023,9
3,4	29,964	0,033373	14,965	14,999	8,4	4447,1
3,5	33,115	0,030197	16,543	16,573	8,5	4914,8
3,6	36,598	0,027324	18,285	18,313	8,6	5431,7
3,7	40,447	0,024724	20,211	20,236	8,7	6002,9
3,8	44,701	0,022371	22,339	22,362	8,8	6634,2
3,9	49,402	0,020242	24,691	24,711	8,9	7332,0
4,0	54,598	0,018316	27,290	27,308	9,0	8103,1
4,1	60,340	0,016573	30,162	30,178	9,1	8955,5
4,2	66,686	0,014996	33,336	33,351	9,2	9897,1
4,3	73,700	0,013569	36,843	36,857	9,3	10238
4,4	81,451	0,012277	40,719	40,732	9,4	12088
4,5	90,017	0,011109	45,003	45,014	9,5	13360
4,6	99,484	0,010052	49,737	49,747	9,6	14765
4,7	109,95	0,009095	54,969	54,978	9,7	16318
4,8	121,51	0,008230	60,751	60,759	9,8	18034
4,9	134,29	0,007447	67,141	67,149	9,9	19930
5,0	148,41	0,006738	74,202	74,209	10,0	22026

TABLE X

Intégrales elliptiques complètes

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}}, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

α	I_1	I_2	α	I_1	I_2	α	I_1	I_2
1°	1,5709	1,5707	31°	1,6941	1,4608	61°	2,1842	1,2015
2°	5713	5703	32°	7028	4539	62°	2132	1920
3°	5719	5697	33°	7119	4469	63°	2435	1826
4°	5727	5689	34°	7214	4397	64°	2754	1732
5°	5738	5678	35°	7312	4323	65°	3088	1638
6°	5751	5665	36°	7415	4248	66°	3439	1545
7°	5767	5649	37°	7522	4171	67°	3809	1453
8°	5785	5632	38°	7633	4092	68°	4198	1362
9°	5805	5611	39°	3748	4013	69°	4610	1272
10°	5828	5589	40°	7868	3931	70°	5046	1184
11°	5854	5564	41°	7992	3849	71°	5507	1096
12°	5882	5537	42°	8122	3765	72°	5998	1011
13°	5913	5507	43°	8256	3680	73°	6521	0927
14°	5946	5476	44°	8396	3594	74°	7081	0844
15°	5981	5442	45°	8541	3506	75°	7681	0764
16°	6020	5405	46°	8691	3418	76°	8327	0686
17°	6061	5367	47°	8848	3329	77°	9026	0611
18°	6105	5326	48°	9011	3238	78°	9786	0538
19°	6151	5283	49°	9180	3147	79°	3,0617	0468
20°	6200	5238	50°	9356	3055	80°	1534	0401
21°	6252	5191	51°	9539	2963	81°	2553	0338
22°	6307	5141	52°	9729	2870	82°	3699	0278
23°	6365	5090	53°	9927	2776	83°	5004	0223
24°	6426	5037	54°	2,0133	2681	84°	6519	0172
25°	6490	4981	55°	0347	2587	85°	8317	0127
26°	6557	4924	56°	0571	2492	86°	4,0528	0086
27°	6627	4864	57°	0804	2397	87°	3387	0053
28°	6701	4803	58°	1047	2301	88°	7427	0026
29°	6777	4740	59°	1300	2206	89°	5,4349	0008
30°	6858	4675	60°	1565	2111	90°	∞	1,0000

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

J. Boccardi, *Guide du calculateur* (Hermann, Paris, 1902).

E. Fabry, *Théorie des séries à termes constants* (Hermann, Paris, 1911).

Jacob, *Le calcul mécanique* (Doin, Paris, 1911).

L. Lévy, *Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques* (Gauthier-Villars, Paris, 1898).

C. Runge, *Graphical methods* (Columbia University Press, 1912).

M. d'Ocagne, *Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques* (2e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1905).

M. d'Ocagne, *Traité de Nomographie* (2e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1921).

M. d'Ocagne, *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (éd. française, t. I, vol. 4, p. 325 et suiv., Gauthier-Villars, Paris, 1909).

Vessiot et Montel, *Cours de Mathématiques générales* (Eyrolles, Paris, 1921 ; voir particulièrement t. I, chap. V, IX et X ; t. II, chap. IV).

L. Zoretti, *Tables numériques usuelles* (Gauthier-Villars, Paris, 1917).

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. — **Les opérations de l'arithmétique**

I. Représentation décimale des nombres 1

1. Données d'un calcul. Nombres, 1. — 2. Représentation sur une droite, 2. — 3. Valeurs approchées d'un nombre à $1/10^n$ près, 2. — 4. Valeur approchée d'un nombre à une demi-unité près d'un certain ordre décimal, 4. — 5. Tables numériques, 5.

II. Calcul des nombres entiers et des nombres décimaux exacts. 6

6. Généralités, 6. — 7. Emploi de tables, 6.

III. Calcul des nombres décimaux illimités. Erreurs. 8

8. Erreur absolue, 8. — 9. Principe de l'addition des erreurs, 11. — 10. Erreur relative, 12. — 11. Calcul des nombres décimaux illimités : méthode élémentaire, 12. — 12. Problème fondamental de la théorie des erreurs, 14. — 13. Opérations abrégées, 15.

CHAPITRE II. — **Les fonctions d'une variable**

I. Polynomes 16

14. Valeurs numériques d'un polynome, 16. — 15. Valeurs de la variable en progression arithmétique. Théorie des différences, 18. — 16. Calcul graphique des valeurs d'un polynome, 22.

II. Fonctions quelconques 26

17. Diverses sortes d'erreurs commises dans le calcul d'une fonction, 26. — 18. Calcul d'une limite supérieure de l'erreur systématique, 27. — 19. Calcul des tables d'une fonction quelconque, 32. — 20. Interpolation, 39. — 21. Usage des tables, 41.

III. Règles à calculs 43

22. Echelle d'une fonction, 43. — 23. Règle à calcul logarithmique, 45. — 24. Autres règles à calculs, 48. — 25. Calcul graphique d'une fonction d'une variable, 48.

CHAPITRE III. — **Les fonctions de plusieurs variables**

I. Calculs d'erreurs 50

26. Formule des accroissements finis, 50. — 27. Application au calcul des erreurs, 52. — 28. Problèmes généraux du calcul des erreurs ; premier problème, 55. — 29. Deuxième problème, 59. — 30. Calcul des erreurs relatives, 71.

II. Calcul graphique des fonctions de plusieurs variables. Nomogrammes 73

31. Abaques, 73. — 32. Généralisation, 77. — 33. Nomogrammes à points alignés, 78.

CHAPITRE IV. — **Les séries**

34. Convergence, 87. — 35. Calcul de la somme d'une série numérique, 90. — 36. Limite supérieure de l'erreur systématique, 91. — 37. Calcul de la somme d'une série numérique, avec une approximation demandée, 94. — 38. Séries entières, 96.

CHAPITRE V. — **Intégrales définies. Equations différentielles**

39. Calcul par un développement en série, 104. — 40. Formule de Simpson, 107. — 41. Deuxième formule, 112. — 42. Intégration graphique, 120. — 43. Construction de la courbe intégrale, 122. — 44. Equations différentielles, 124. — 45. Appareils mécaniques, 126.

Chapitre VI. — Intégrales elliptiques

46. Formes de Legendre, 127. — 47. Calcul des intégrales de première et de seconde espèce, 128. — 48. Tables de Legendre, 129. — 49. Intégrales complètes, 130. — 50. Réduction d'une intégrale elliptique aux formes de Legendre, 133.

Chapitre VII. — Résolution des équations algébriques ou transcendantes

I. Equations linéaires 141

51. Elimination graphique d'une inconnue entre deux équations linéaires, 141. — 52. Résolution graphique de n équations linéaires à n inconnues, 144.

II. Equations non linéaires 146

53. Préliminaires, 146. — 54. Méthodes graphiques pour obtenir grossièrement les racines d'une équation $f(x)=0$, 147. — 55. Calcul plus précis des racines par voie graphique. Méthode d'extension, 157. — 56. Recherche précise des racines par le calcul. Méthodes d'approximation, 161. — 57. Approximations successives par itération, 174. — 58. Méthodes particulières à l'équation du troisième degré, 178.

TABLES NUMÉRIQUES

Table I. — Valeurs de n, n^2, n^3, $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\frac{1000}{n}$ et Log. nép. n, pour n compris entre 0 et 100. 182

Table II. — Sinus naturels, de 10 en 10 minutes 186

Table III. — Cosinus naturels, de 10 en 10 minutes 188

Table IV. — Tangentes naturelles, de 10 en 10 minutes. 190

Table V. — Cotangentes naturelles, de 10 en 10 minutes. 192

Table VI. — Transformation des degrés en radians 194
Table VII. — Nombres usuels π et g 195
Table VIII. — Intégrales usuelles. 196
Table IX. — Fonction exponentielle. Fonctions hyperboliques 198
Table X. — Intégrales elliptiques complètes . 200

Etablissements André Brulliard. — Saint-Dizier (Hte-Marne).

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515G229C C001
CALCULS NUMERIQUES ET GRAPHIQUES PARIS
3 0112 017228799